DER SCHUSS AUF GENEIGTER EBENE

Das Massenpunktmodell der Aussenballistik beschreibt ein Geschoss durch seine Querschnittbelastung q (aus Masse m und Kaliber d) und seinen Luftwiderstandsbeiwert c_W.

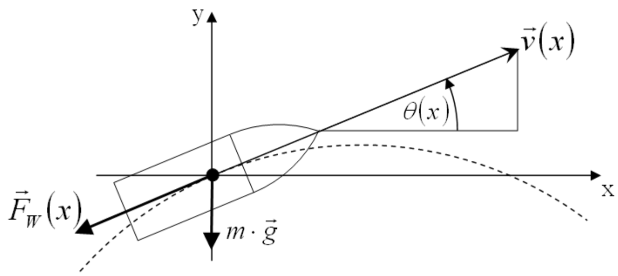

Bild 1

Sein Bewegungszustand ist gegeben durch die momentane Geschwindigkeit $\vec{v}$, welche sich unter der Wirkung von Gewichtskraft $m \cdot \vec{g}$ und Luftwiderstandskraft $\vec{F}_W$ (Bild 1) beständig ändert. Die atmosphärischen Bedingungen gehen über die Luftwiderstandskraft in das Modell ein, explizit die Luftdichte ρ, implizit (versteckt im Luftwiderstandsbeiwert c_W) auch die Temperatur. Unter Missachtung von Einflüssen, welche die Flugbahn seitlich krümmen, ergibt sich eine ebene Flugbahn, welche sich durch je eine Differentialgleichung nach der x- und nach der y-Richtung beschreiben lässt, ganz ähnlich wie unten Formeln 1) und 2). Diese Gleichungen finden wir unter Anwendung des zweiten Axioms von Newton und sie sind in ihrer allgemeinen Form nicht analytisch lösbar. All dies findet sich ausführlich beschrieben in Kneubuehls „Ballistik“ (Springer 2018), welches Buch als Hintergrund zu vorliegendem Artikel diene.

Die Flugbahngleichungen werden analytisch lösbar unter folgenden Bedingungen:

1. Über die ganze Flugbahn gelte immer $-0.1 < v_y/v_x < 0.1$. Dies entspricht einer Beschränkung des Bahnwinkels θ (Bild 1) auf Werte ±6° (flache Flugbahn) und bewirkt, dass die Gewichtskraft immer hinreichend genau senkrecht zur Bewegungsrichtung angreift.
2. Der Luftwiderstandsbeiwert c_W soll konstant sein. Dies verträgt sich gut mit der ersten Forderung, denn flache Flugbahnen sind kurz genug, um die Geschwindigkeitsabhängigkeit des c_W vernachlässigen zu dürfen.

Unter diesen beiden Bedingungen erhalten wir die Flugbahnformel für den ebenen Schuss wie im Kasten nebenan. Die Bedingungen werden beim bestimmungsgemässen Gebrauch von Hand- und Faustfeuerwaffen vollständig erfüllt, weshalb die Formel zur Analyse ballistischer Aufgaben rund um den Einsatz dieser Waffengattungen bestens geeignet ist und sie als Referenz für die folgende Analyse des geneigten Schusses dienen soll.

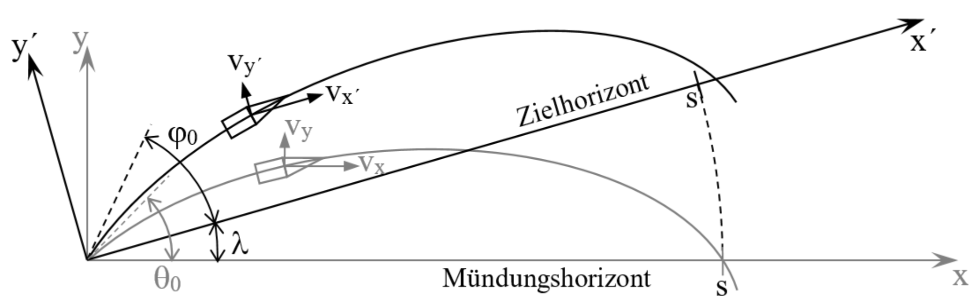

Bild 2

Befinde sich das Ziel in einem Zielhorizont, welcher mit dem Mündungshorizont einen Lagewinkel λ einschliesse (Bild 2). Dann würde die Elevation (Bahnwinkel am Anfang der Flugbahn) $\theta_0 > \lambda$ im Allgemeinen die Forderung nach kleinen Bahnwinkeln verletzen und der eröffnete Lösungsweg sich wieder schliessen. Wenn wir aber die Flugbahn in neuen Koordinaten beschreiben, welche dem Zielhorizont folgen, so wird die Flugbahn wieder flach! Der Bahnwinkel in den geneigten x’-y’-Koordinaten werde mit φ bezeichnet mit Anfangswert

φ_0, genannt „Schusswinkel“ (manchmal auch „Aufsatzwinkel“). Die Gewichtskraft greift dann hinreichend genau immer mit einem Winkel $90° + \lambda$ am Geschoss an und wir können wieder mit Newton zwei Differentialgleichungen über der Zeit formulieren. Mit $v_{x'} = dx'/dt$ transformieren wir diese in Differentialgleichungen über dem Weg x':

1) $$\frac{dv_{x'}}{dx'} = -\frac{K}{2} \cdot v_{x'} - \frac{g \cdot \sin\lambda}{v_{x'}}$$

2) $$\frac{dv_{y'}}{dx'} = -\frac{K}{2} \cdot v_{y'} - \frac{g \cdot \cos\lambda}{v_{x'}}$$

Die Lösung der beiden Gleichungen ist ziemlich aufwändig, wobei sich für 1) ein Produktansatz $v'(x') = f(x') \cdot g(x')$ als zielführend erweist. Am Ende des Lösungsweges steht die Formel für die Flugbahn des Schusses auf geneigter Ebene wie im Kasten nebenan. Die Lösung erfüllt zwei logisch zwingende Forderungen (numerisch geprüft):

Flugbahn ebener Schuss: $y(x) = \left(\sin\theta_0 + \frac{g}{K \cdot v_0^2}\right) \cdot x - \frac{g}{K^2 \cdot v_0^2} \cdot \left(e^{K \cdot x} - 1\right)$
Flugbahn geneigter Schuss: $y'(x') = \frac{x'}{\tan\lambda} - \frac{2}{K} \cdot \left(\sin\varphi_0 - \frac{1}{\tan\lambda}\right) \cdot \frac{v_0}{V} \cdot \ln\left(\frac{e^{-\frac{K}{2} \cdot x'} + \sqrt{e^{-K \cdot x'} + \frac{v_0^2}{V^2} - 1}}{\frac{v_0}{V} + 1}\right)$
Hilfsgrössen: $K := \frac{\rho \cdot c_W}{q} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d^2 \cdot \rho \cdot c_W}{m}$ $\quad [K] = \frac{1}{m}$; $V := \sqrt{2 \cdot \frac{\sin\lambda \cdot g}{K} + v_0^2}$ $\quad [V] = \frac{m}{s}$

1. Für $\lambda \to 0$ konvergiert die Flugbahn des geneigten Schusses gegen diejenige des ebenen Schusses.
2. Für $K \to 0$ konvergiert die Flugbahn des geneigten Schusses in Luft gegen diejenige im luftleeren Raum.

Um uns die Aussage der sperrigen Formel zu erschliessen, wenden wir sie auf eine gängige Patrone Kal. 7.62 mm an (Bild 3) an.

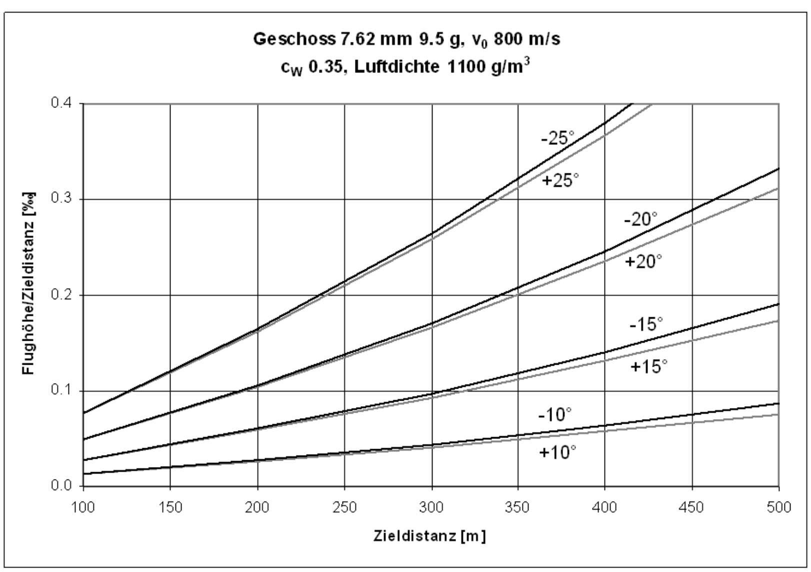

Bild 3

Bild 3 zeigt die relativen Flughöhen $y'(x'=s)/s$ zu Zieldistanzen s mit Schusswinkeln φ_0, welche beim ebenen Schuss jeweils einen Fleckschuss ergäben $y(x=s)=0$ (vgl. Bild 2). Das Bild sagt uns, dass mit dieser Patrone auf geneigter Ebene immer ein Hochschuss resultiert. Tatsächlich gilt dies für alle rasanten Patronen mit Schusswinkeln $\varphi_0 << \lambda$ und deshalb: Schiesst Du rauf, schiesst Du runter – halte drunter! Um die praktische Relevanz der Abweichung zu beurteilen, diene ein Wert von 0.1‰ als Referenz, entsprechend der beliebten Klick-Verstellung an Zielfernrohren (1 cm auf 100 m = 0.1‰). Eine mit einem solchen Zielfernrohr überhaupt korrigierbare Abweichung finden wir gemäss Bild 3 nur bei bedeutenden Lagewinkeln und recht grossen Distanzen und wir erkennen: Der geneigte Schuss ist ein ziemlich schwieriges ballistisches Problem, muss uns in der Praxis des Büchsenschiessens allerdings kaum je kümmern.

Dipl.-Ing. M. Tschannen
März 2021