

# **Aussenballistik:** **Messtechnik und** **mathematische Modelle**



## **Vorwort**

Das vorliegende Dokument enthält die Zusammenstellung einer Artikelserie, welche im Schweizer Waffenmagazin ab Ausgabe 6/2005 bis erschien. Thema sind das Wechselspiel von Möglichkeiten der Messtechnik und der mathematischen Modellierung, um Flugbahnen zu ermitteln. Ergänzend zur vorliegenden Schrift sei die Anwendung von „Ballistik für den Feldgebrauch“ empfohlen.

Das Layout ist für umseitigen Druck in schwarz-weiss vorbereitet.

Marcel Tschannen



## **Inhaltsverzeichnis**

Beschreibung der Flugbahn	7
Die Flugbahn im Vakuum	11
Die Flugbahn in Luft	15
Messtechnik	19
Der ballistische Koeffizient	23
Messungen mit Lichtschranken	27
Der Luftwiderstand	30
Anhang: Umrechnungstabellen	34



## Beschreibung der Flugbahn

Jeder Schütze hat eine Vorstellung davon, wie eine Flugbahn aussieht, und kann sie sprachhaft beschreiben. In Katalogen sind Flugbahnen meist in Form von Zahlentabellen angegeben – um solche erstellen oder lesen zu können, muss man sprachliche Begriffe wie „krumm“ und „Schnittpunkt“ durch zahlenmässig ausdrückbare Begriffe aus der Physik ersetzen.

### 1. Begriffe

Was landläufig unter „Flugbahn“ verstanden wird, ist eigentlich die Entwicklung der Flughöhe  $y$  mit fortschreitender Distanz  $x$ , welche auf einer waagerechten Linie durch die Mündung abgetragen wird;  $y$  wird rechtwinklig zu dieser Linie gemessen. Die Physik allerdings liefert zuerst die Entwicklungen von Flughöhe  $y$  und Flugdistanz  $x$  mit fortschreitender Zeit  $t$ , beginnend mit dem Mündungsabgang. Solche Entwicklungen nennt man „Funktionen“ und schreibt z. B.  $y = f(t)$ , gelesen als:  $y$  ist eine Funktion von  $t$ . „ $t$ “ ist hier die Variable und die Funktion  $y(t)$  ordnet jedem Wert von  $t$  einen Wert  $y$  zu.

Aus der Physik folgen also die Funktionen  $y(t)$  und  $x(t)$ , aber eigentlich möchte man die Funktion  $y(x)$  kennenlernen; da nun ein Geschoss zu einer bestimmten Zeit nur genau einen bestimmten Ort einnehmen kann, lässt sich die Zeit  $t$  aus den Funktionen eliminieren und zu einer einzigen Ortsfunktion  $y(x)$  zusammenfassen, wobei allerdings die Information über die Zeitverhältnisse verloren geht. Bild 1 zeigt einen Graphen (bildliche Darstellung einer Funktion)  $y(x)$  und Bild 2  $y(t)$ , beide für eine GP90 aus einem Stgw 90 verschossen.

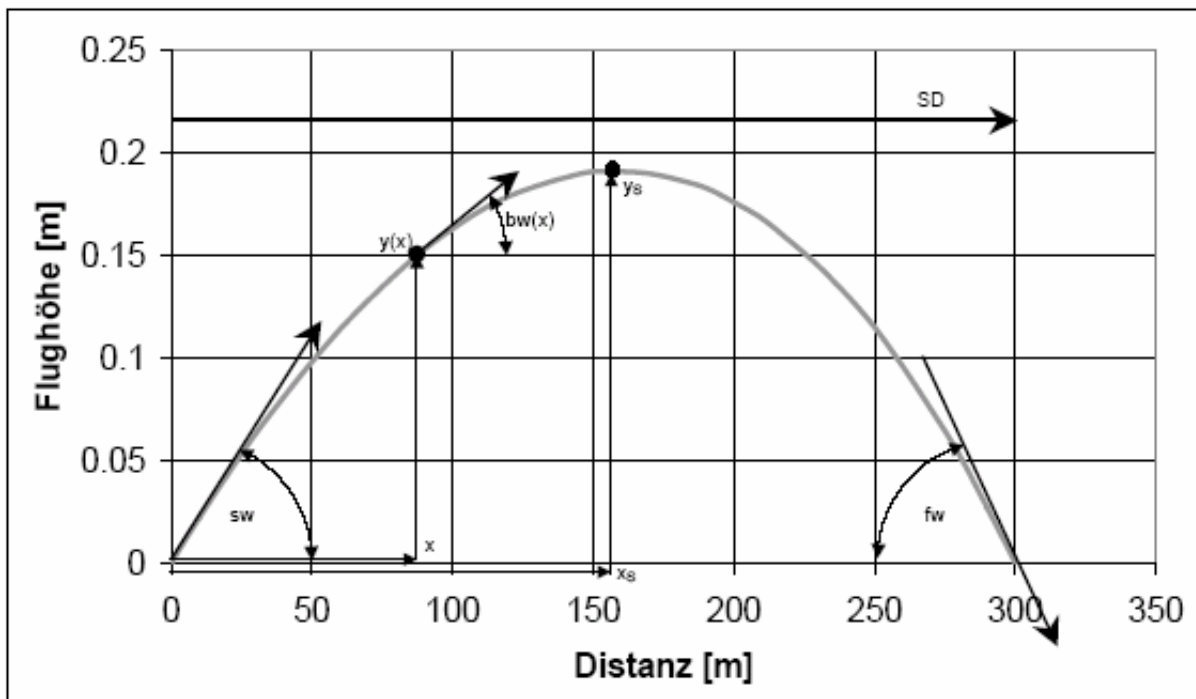


Bild 1

Genau genommen ist  $y$  nicht nur eine Funktion der Zeit  $t$  bzw. der Distanz  $x$ , sondern auch des Schusswinkels  $sw$ , der Mündungsgeschwindigkeit  $v_0$ , der Geschossform und der atmosphärischen Bedingungen (darunter fallen namentlich die Abhängigkeit der Flugbahn von Höhe über Meer, Temperatur und Druck); man muss also schreiben:

$$y = f(x \text{ bzw. } t, sw, v_0, \text{Geschossform, Atmosphäre})$$

Je nachdem, welche Entwicklung einen interessiert, wird eine dieser Größen als Variable genommen (als „laufende“ Grösse) und die anderen als Parameter, Start- oder Randbedingungen festgehalten; im Folgenden wird nur die Flugbahnfunktion  $y(x)$  betrachtet. Schützen schießen ihre Kugeln normalerweise nicht einfach in die Luft, sondern wollen ein Ziel treffen, das sich in einer bestimmten Distanz befindet; man nennt diese die Schussdistanz  $SD$ . Unter Vernachlässigung der Problematik um die Schnittpunkte von Visierlinie und Flugbahn, Zielen mit Haltepunkt („Schwarz 6“ der Sportschützen) und was passiert, wenn das Ziel viel höher oder tiefer als der Schütze liegt, kann man sagen, dass ein Treffer dann erfolgt, wenn gilt  $y(x = SD) = 0$ , sich also die Flugbahn mit der Mündungslinie schneidet. Bild 1 zeigt diese Schussdistanz  $SD$  und in Bild 2 erkennt man die zugehörige Flugzeit  $T$ ; je nach Betrachtungsweise gilt also räumlich  $y(SD) = 0$  oder zeitlich  $y(T) = 0$ .

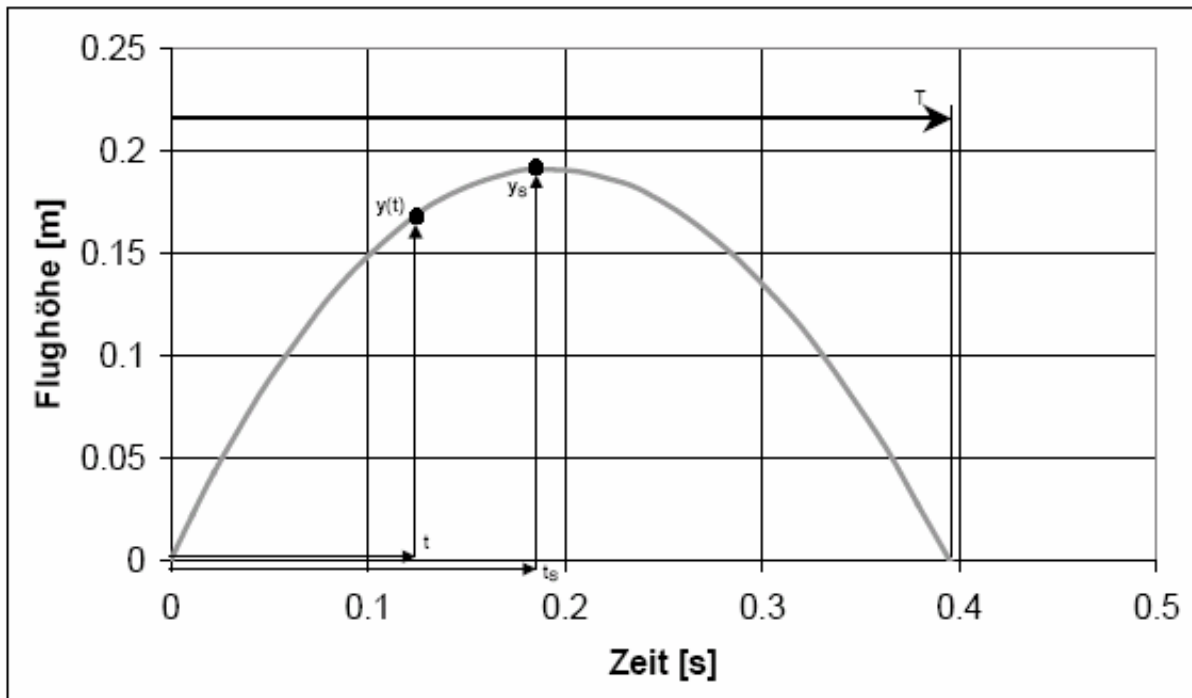


Bild 2

Jeder mögliche Ort des Geschosses ist ein Punkt  $P$  auf der Flugbahnkurve (Bild 1) mit den Koordinaten  $P(x, y(x))$ . In so einem Punkt verfügt das Geschoss über eine bestimmte momentane Geschwindigkeit  $v(x)$  und eine momentane Bewegungsrichtung, welche durch den Bahnwinkel  $bw(x)$  angegeben wird. Am Startpunkt der Flugbahn, bzw. zur Startzeit  $t = 0$  heisst die Geschwindigkeit „Mündungsgeschwindigkeit“  $v_0$  und der Bahnwinkel  $bw(0)$  heisst „Schusswinkel“ oder Elevation; man nennt diese zwei Größen „Startbedingungen“ und sie bestimmen weitgehend den weiteren Verlauf der Flugbahn. Im Ziel nach  $x = SD$  nennt man den Bahnwinkel  $bw(SD)$  „Fallwinkel“  $fw$ , wobei man nur den Betrag des dort immer negativen Bahnwinkels angibt.

Den höchsten Punkt der Flugbahn nennt man „Scheitelpunkt“ mit den Koordinaten  $(x_s, y_s)$ ; in diesem Punkt wird der Bahnwinkel  $bw(x_s) = 0$ . In der Ortsfunktion  $y(x)$  ist der Scheitelpunkt kurz nach der Hälfte der Schussdistanz  $SD$ , in der Zeitfunktion  $y(t)$  kurz vor der halben Flugzeit  $T$  (vgl. Bild 2). Der Zeitverlauf interessiert Schützen in der Regel nicht besonders, die Kenntnis der Zeitverhältnisse wird aber wichtig, wenn man auf bewegte Ziele schießt oder wenn man die Störungsempfindlichkeit des Geschossfluges analysieren will (namentlich die Querwindempfindlichkeit und die Zunahme der Streuung).

## 2. Darstellung

Man kann die Flugbahn  $y(x)$  als Graphen darstellen, was sehr anschaulich und vollständig ist, aber ein genaues Ablesen der Werte erschwert und viel Platz braucht. Häufig stellt man



FLUGBAHTABELLE					
<b>Geschoss- und Waffendaten</b>					
Munition:	5.6 mm Gw Pat 90				
Waffe:	Stgw 90				
Kaliber:	5.6 mm				
Geschoßmasse:	4.1 g				
Mündungshöhe (m.ü.M.):	0 m				
<b>STARTWERTE</b>					
Anfangsgeschwindigkeit:	905 m/s				
Elevation sw:	6.22 mrad				
x [m]	y [m]	v [m/s]	E [J]	ED [J/mm <sup>2</sup> ]	bw [mrad]
0	0.00	905	1679	68.2	6.22
50	0.29	857	1505	61.1	5.58
100	0.55	810	1346	54.7	4.86
150	0.77	766	1201	48.8	4.05
200	0.94	722	1069	43.4	3.15
250	1.07	680	948	38.5	2.13
300	1.15	639	837	34.0	0.98
350	1.17	599	736	29.9	-0.32
400	1.12	561	645	26.2	-1.81
450	0.99	523	562	22.8	-3.51
500	0.77	487	487	19.8	-5.47
550	0.44	452	418	17.0	-7.74
600	0.00	417	356	14.5	-10.40
650	-0.59	383	301	12.2	-13.53
700	-1.34	350	251	10.2	-17.25
750	-2.29	325	217	8.8	-21.67
800	-3.48	310	196	8.0	-26.65

deshalb die Flugbahn als Tabelle dar, die zu ausgesuchten Werten von x die zugehörigen Flughöhen angibt. Als Beispiel ist die Flugbahntabelle einer GP90 gezeigt, verfeuert aus einem Stgw 90 mit einem Schusswinkel von 6.22 mrad. Streng genommen enthält eine Flugbahntabelle nur zwei Spalten, nämlich für x und y(x), aber weil bei der Berechnung die Verläufe v(x) und bw(x) gewissermassen als Nebenprodukte anfallen, kann man diese Zustandsgrößen auch gleich mit angeben; und weil man aus Kenntnis der Geschwindigkeit, der Geschossmasse und dem Kaliber auch die Energie E und die Energiedichte ED bestimmen kann, fällt es leicht, die Flugbahntabelle entsprechend zu vervollständigen.

Viele Schützen glauben, mit einer Flugbahntabelle wisse man bereits alles und könne z. B. aus der Flughöhe bei einer gewissen Distanz die zugehörige Visierkorrektur berechnen. Das ist aber falsch: Wenn ich nämlich die Startbedingungen – hier namentlich die Elevation – verändere, erzeuge ich eine neue Flugbahn; aus der Flugbahn zur Schussdistanz 600 m kann ich also nur beschränkt Aussagen über die Flugbahn zu einer Schussdistanz 100 m oder 300 m ableiten.

SCHUSSTAFEL										
<b>Geschoss- und Waffendaten</b>										
Munition:	5.6 mm Gw Pat 90									
Waffe:	Stgw 90									
Kaliber [mm]:	5.6									
Geschoßmasse [g]:	4.1									
Mündungshöhe (m.ü.M.):	0									
Anfangsgeschwindigkeit:	905									
SD [m]	sw [mrad]	v [m/s]	E [J]	ED [J/mm <sup>2</sup> ]	T [s]	qw [cm]	fw [mrad]	x <sub>s</sub> [m]	y <sub>s</sub> [cm]	
0	0.00	905	1679	68.2	0.00	0.0	0.00	0	0.0	
50	0.32	857	1505	61.1	0.06	0.2	0.33	25	0.4	
100	0.66	810	1346	54.7	0.12	0.6	0.71	51	1.7	
150	1.02	766	1201	48.8	0.18	1.5	1.15	77	4.0	
200	1.42	722	1069	43.4	0.25	2.7	1.65	104	7.5	
250	1.85	680	948	38.5	0.32	4.3	2.24	131	12.5	
300	2.32	639	837	34.0	0.39	6.3	2.92	159	19.2	
350	2.83	599	736	29.9	0.48	8.9	3.72	188	27.9	
400	3.38	561	645	26.2	0.56	12.0	4.65	217	38.9	
450	3.99	523	562	22.8	0.65	15.7	5.74	247	52.9	
500	4.66	487	487	19.8	0.75	20.1	7.03	279	70.3	
550	5.40	452	418	17.0	0.86	25.2	8.56	311	91.8	
600	6.22	417	356	14.5	0.98	31.2	10.40	344	118.4	

Hier kommt nun die Schusstafel ins Spiel. Wenn die Flugbahntabelle ausführlich den Weg des Geschosses ins Ziel und darüber hinaus beschreibt, so gibt die Schusstafel nur an, wie die Kugel dort ankommt – dies dafür für verschiedene Schuss-(bzw. Ziel-)Distanzen SD; aus der Beispiel-Flugbahntabelle finden also nur die Größen bei 600 m sowie die zugehörige Startbedingung sw Eingang in die entsprechende Zeile der Schusstafel. Um es ganz deutlich

zu machen: Die Flugbahntabelle enthält nur Angaben für eine einzige Flugbahn, die Schusstafel im Beispiel jedoch für insgesamt zwölf verschiedene!

In der Schusstafel gehen natürlich gewisse Informationen verloren, etwa Bahnwinkel und Geschwindigkeit bei halber Distanz, aber solche Kenntnisse sind eher von akademischem Interesse. Alle praxis-relevanten Grössen hingegen finden sich in einer Schusstafel, namentlich etwa der einzustellende Schusswinkel, den man zur Berechnung von Visiereinstellungen benötigt. Da die Schusstafel ein echtes Werkzeug für den Praktiker sein soll, bemüht man sich um möglichst vollständige Angaben. Im Beispiel etwa (erzeugt mit der Software k-ballistics 3.11 von Kneubuehl) finden sich auch die Flugzeit  $T$  und die Querwindablage  $q_w$  für eine Querwindstärke von 1 m/s.

### **3. Zusammenfassung**

Zur Beschreibung der Flugbahn definiert man eine Anzahl zahlenmässig erfassbarer Grössen. Diese stellt man entweder als Funktion der Zeit  $t$  oder des Weges  $x$  als Graphen oder als Tabelle dar. Die Flugbahntabelle enthält die vollständigen Informationen zu einer bestimmten Flugbahn, die Schusstafel stellt für Flugbahnen zu verschiedenen Schussdistanzen jeweils die Startbedingungen und Endzustände zusammen.

## Die Flugbahn im Vakuum

Um einen physikalischen Prozess berechnen zu können, braucht man ein mathematisches Modell, in dessen Formeln man die bekannten Grössen des Prozesses einsetzt und das dann die Berechnung der unbekannt Grössen erlaubt. Je nach dem, welche messtechnischen und mathematischen Mittel einem zur Verfügung stehen, kann das Modell verfeinert werden. Das einfachste Modell, um die Flugbahn eines Geschosses zu berechnen, ist das Vakuum-Modell.

### 1. Klassische Physik

Das Vakuum-Modell ist ein physikalisches Modell, das auf den Gesetzen der Newton'schen Mechanik beruht, wonach Kraft = Masse x Beschleunigung ist (die Beschleunigung bezeichnet die Geschwindigkeitsänderung pro Zeit und hat die Einheit  $\text{m/s}^2$ ). Wenn nun eine Geschossmasse mit einer bestimmten Geschwindigkeit in eine bestimmte Richtung geschleudert wird, so wird die Geschossmasse in dieser ursprünglichen Bewegung bleiben, bis eine Kraft diese verändert. Im Vakuum-Modell wird die Kraft des Luftwiderstandes auf die Geschossmasse nicht berücksichtigt, wohl aber die Anziehungskraft der Erde. Diese erteilt der Geschossmasse eine Beschleunigung  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  mit Richtung zum Erdmittelpunkt und ist somit für die Krümmung der Flugbahn verantwortlich.

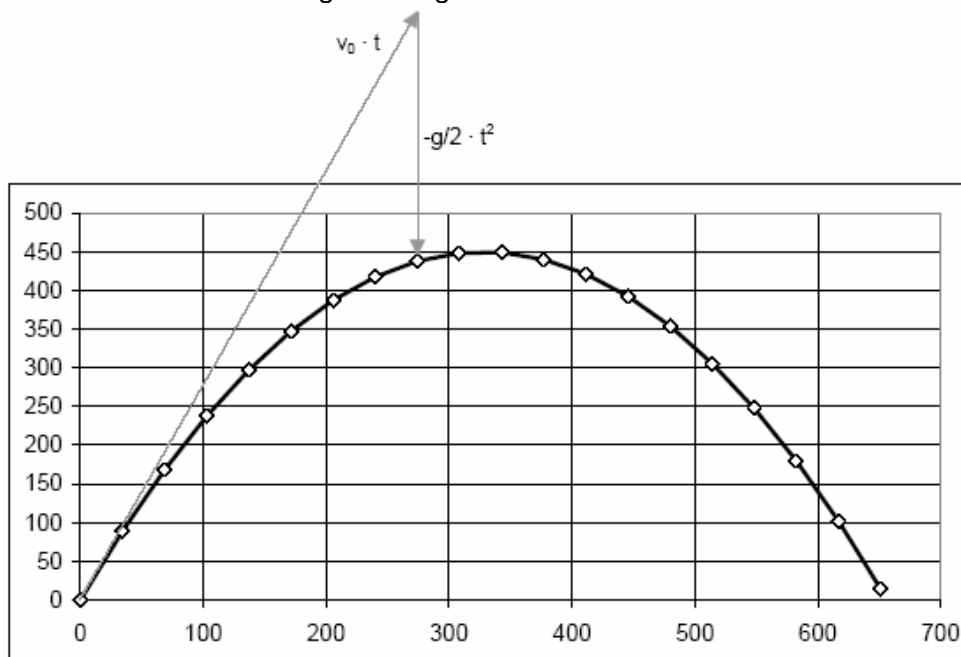


Bild 1

Zur Mathematisierung des Geschossfluges legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit Ursprung (Null-Punkt) in der Waffenmündung. Die x-Achse ist waagrecht und bezeichnet die Flugdistanz in Metern, die y-Achse zeigt senkrecht dazu nach oben und gibt die Flughöhe an, ebenfalls in Metern. Bild 1 zeigt so ein Koordinaten-System und ausserdem ersieht man daraus, wie der ursprünglichen Geschossbewegung der freie Fall zur Erde überlagert wird, wodurch sich die bekannte Parabel-Form der Flugbahn im Vakuum ergibt. Wenn man die Start-Bewegung des Geschosses mit Geschwindigkeit  $v_0$  und Schusswinkel  $\text{sw}$  in die beiden Koordinaten-Richtungen aufteilt, erhält man folgende Formeln:

$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos(\text{sw})$$

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(\text{sw})$$

In y-Richtung muss man nun aber den freien Fall berücksichtigen: Da man dessen Beschleunigung  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  kennt, kann man leicht seine Integration über die Zeit

durchführen:  $v_{\text{Fall}} = -g \cdot t$  und  $y_{\text{Fall}} = -g/2 \cdot t^2$ . (Das negative Vorzeichen kommt daher, weil die Bewegungsrichtung entgegengesetzt zur y-Richtung liegt.) Wir ziehen nun den Weg des freien Falles vom aufsteigenden Geschossweg ab und erhalten für die Flughöhe zur Zeit t:

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(\text{sw}) - g/2 \cdot t^2$$

Um die Flughöhe y zu einer Distanz x zu erfahren, eliminieren wir die Zeit und erhalten:

$$y(x) = x \cdot \tan \text{sw} - g \cdot x^2 / (2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 (\text{sw}))$$

Diese Formel beschreibt eine Flugbahn wie in Bild 1 dargestellt (und auch in Bildern 2, 3 und 4). Dank dieser Formel braucht man nur die Mündungsgeschwindigkeit und den Schusswinkel zu messen und man kann die Flughöhe zu allen Distanzen x berechnen!

Für kleine Winkel ( $\text{sw} < 1^\circ$ ), wie sie beim Büchsen- und Pistolenschuss auftreten, kann man die Formel wie folgt vereinfachen (sw ist darin als Bogenmass anzugeben):

$$y(x) = x \cdot \text{sw} - g \cdot x^2 / (2 \cdot v_0^2)$$

## 2. Anwendung des Vakuum-Modelles

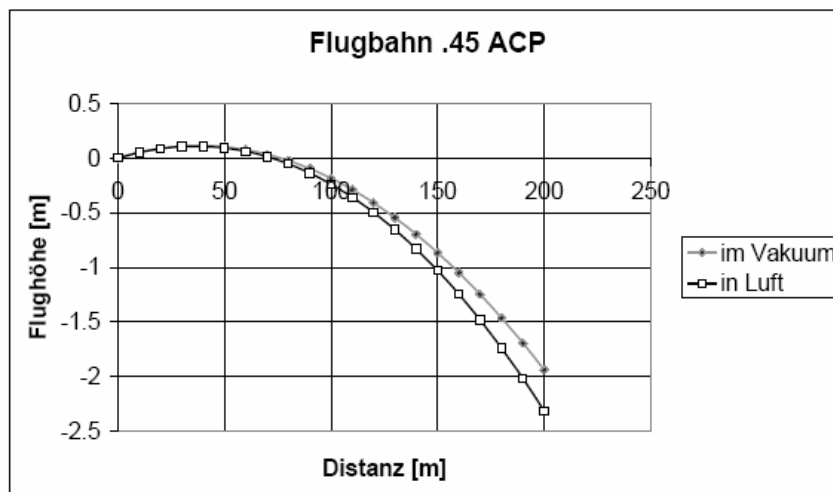


Bild 2

Das Vakuum-Modell ist der Idealfall einer sogenannten „geschlossenen Lösung“, d. h. man hat einen vollständigen Zugriff auf sämtliche in den Formeln verwendeten Grössen. So kann man etwa die vereinfachte Formel für y(x) nach dem Schusswinkel sw für einen Fleckschuss auf die Distanz x = SD umformen, was besonders wichtig ist für die Berechnung von Visiereinstellungen:

$$\text{sw}_{\text{Fleckschuss}} = (g \cdot \text{SD}) / (2 \cdot v_0^2) \quad (\text{resultierender sw als Bogenmass})$$

Ausserdem kann man durch Ableitung untersuchen, wie empfindlich die Treffpunktlage auf Veränderungen des Schusswinkels oder der Mündungsgeschwindigkeit reagiert. Schliesslich kann man Formeln für folgende Kennzahlen der Flugbahn angeben:

$$\begin{aligned} \text{Flugzeit:} & \quad T = 2 \cdot v_0 \cdot \sin (\text{sw}) / g \\ \text{Schussdistanz:} & \quad \text{SD} = v_0^2 / g \cdot \sin (2 \cdot \text{sw}) \end{aligned}$$

Diese Formeln findet man wie folgt: Auf die Schussdistanz x = SD schneidet bei Fleckschuss die Flugbahn die x-Achse, d. h.  $y(x = \text{SD}) = 0$ ; die entstehende Gleichung lässt sich dann algebraisch zu obenstehenden Ausdrücken umformen.

Eine Formel für die Scheitelhöhe (höchster Punkt der Flugbahn) findet man, indem man die Symmetrie der Vakuum-Flugbahn ausnutzt: Der Scheitelpunkt liegt bei halber Schussdistanz  $x = SD/2!$

Scheitelhöhe:  $y_s = \sin^2(\alpha) \cdot v_0^2 / 2g$

Mathematische Schönheit ist eine feine Sache, aber letztendlich ist die Genauigkeit des Modelles wesentlich für seinen praktischen Nutzen. Bild 2 zeigt den Vergleich von Flugbahnen einer Pistolenpatrone .45 ACP, einmal mit dem Vakuum-Modell berechnet und einmal mit der hochpräzisen Software „k-ballistics 3.11“ von Kneubuehl; letztere darf man als „wahre“ Flugbahn betrachten. Der Fehler des Vakuum-Modells beträgt auf 100 m bloss etwa 5 cm und vermag also die Flugbahn dieses schweren, langsamen Geschosses ganz gut zu beschreiben.

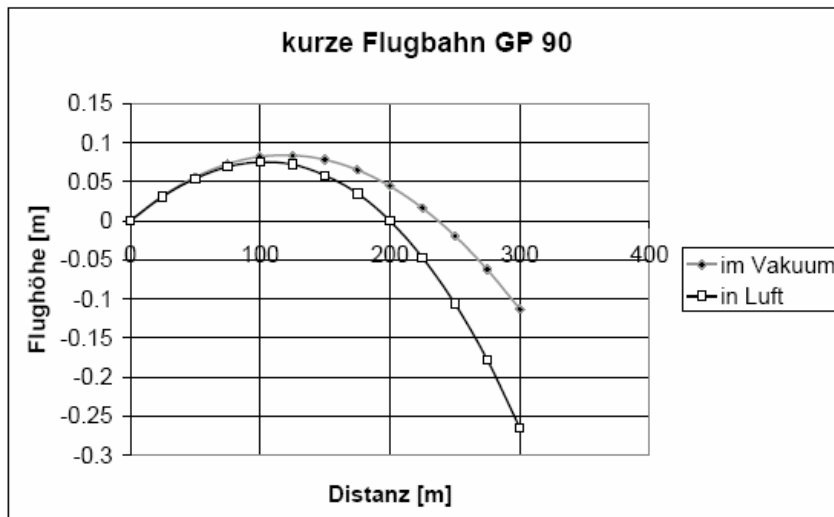


Bild 3

In Bild 3 beschreiben die beiden Modelle je die Flugbahn einer GP 90 (.223 Remington): Die Flugbahn dieser leichten, rasanten Geschosses wird bis 200 m brauchbar durch das Vakuum-Modell beschrieben, danach werden die Abweichungen erheblich. Noch schlimmer wird es, wenn man die „long range trajectory“ der GP 90 berechnen will (Bild 4): Die beiden Flugbahnen zeigen kaum noch Aehnlichkeit! Zur Berechnung von weiten Schüssen ist also die Vernachlässigung des Luftwiderstandes nicht mehr zulässig.

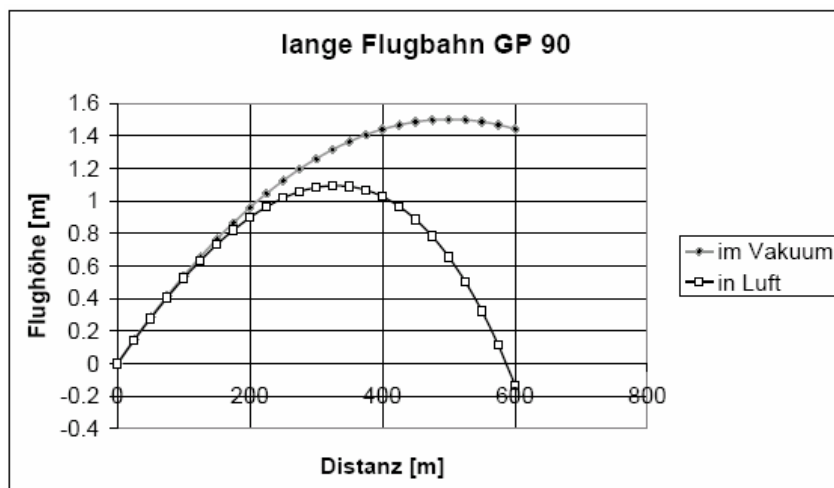


Bild 4

Der Schlüssel zur Beschränkung des Anwendungsbereichs des Vakuum-Modells liegt in der Flugzeit: Je länger das Geschoss unterwegs ist, umso mehr Zeit hat der Luftwiderstand, um

seine Wirkung zu entfalten und so die Flugbahn zusätzlich zu krümmen. Das Vakuum-Modell liefert gute Resultate bis zu Flugzeiten von etwa 0.2 s und eignet sich somit für typische Anwendungen von Maschinenpistolen, Pistolen und Revolvern, kann aber auch noch für Gewehre im jagdlichen Bereich angewandt werden. Für Weitschuss-Gewehre, Maschinengewehre oder gar Artillerie hingegen ist es völlig unbrauchbar und man muss wesentlich mehr messtechnischen und mathematischen Aufwand betreiben.

### **3. Zusammenfassung**

Das Vakuummodell setzt nur die Kenntnis weniger, einfach zu bestimmender Größen voraus und erlaubt aussenballistische Berechnungen mit einfachen Formeln; manche kann man sogar zu richtiggehenden „Faustformeln“ vereinfachen. Die Anwendung beschränkt sich auf Nahkampfwaffen bis hin zu Sturm- und Jagdgewehr – das ist zwar ein bedeutender Anteil eines Arsenal, kann aber ausgerechnet den besonders ballistik-interessierten Scharfschützen nicht dienen.

## Die Flugbahn in Luft

Der Einbezug des Luftwiderstandes in die Modellgleichungen des Geschossfluges sprengt die algebraischen (symbolischen, formelhaften) Lösungsmethoden der klassischen Analysis: Von nun an sind Computer und numerische Mathematik gefordert.

### 1. Der Luftwiderstand

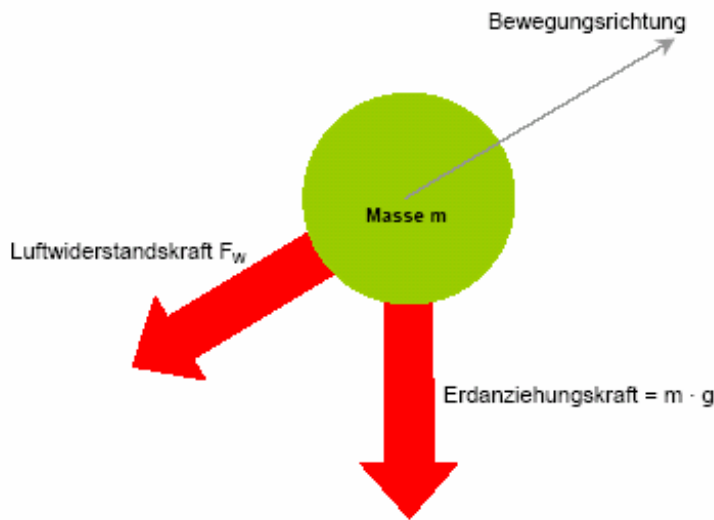


Bild 1

Physikalische Grundlage der Modellbildung ist nach wie vor die klassische Mechanik nach Newton, nur das an der fliegenden Masse nun nebst der Erdsanziehung eine weitere Kraft angreift: Der Luftwiderstand (siehe Bild 1). Seine Richtung ist der Bewegungsrichtung der Geschossmasse entgegengesetzt und erteilt dieser eine Beschleunigung vom Betrag

$$a_w = c_w(v)/q \cdot \rho(y)/2 \cdot v^2$$

$c_w$  ist der Luftwiderstandsbeiwert und hängt von der momentanen Geschwindigkeit  $v$  ab; die schwarze Kurve in Bild 2 zeigt einen typischen Verlauf des  $c_w$  über die Geschwindigkeit (konkret den einer GP 90). Typisch daran ist namentlich der Buckel im Bereich der Schallgeschwindigkeit, die Zahlenwerte jedoch können mit der Geschossform stark ändern.  $q$  ist in der Formel die Querschnittbelastung Masse/Querschnittfläche und  $\rho$  (gesprochen: rho) ist die Dichte von Luft und hängt von der Flughöhe  $y$  ab. Wenn nun die Erdsanziehungskraft freundlicherweise eine konstante Beschleunigung  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  bewirkt, so ändert sich die Beschleunigung durch den Luftwiderstand beständig mit Ort und Geschwindigkeit des Geschosses. Da ausserdem die Funktion  $c_w(v)$  mehrfach gekrümmt ist, scheitert eine algebraische Integration der Bewegungsgleichungen und man muss diese Arbeit dem Computer überantworten.

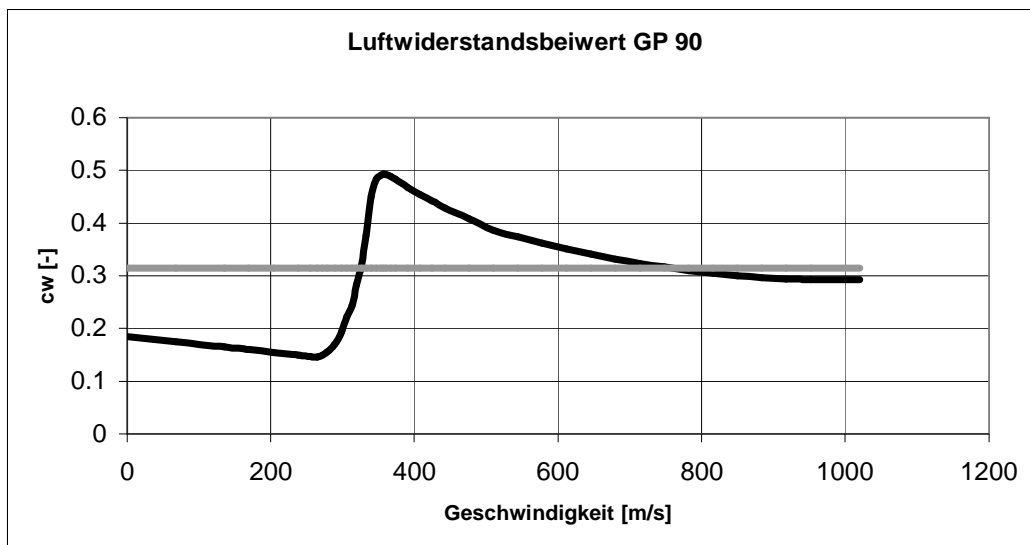


Bild 2

## 2. Numerische Integration

Man weiss es noch aus der Schule: Geschwindigkeit mal Zeit gleich Weg. Das stimmt aber nur, wenn die Geschwindigkeit über den betrachteten Zeitraum konstant bleibt. Aber selbst wenn die Geschwindigkeit variiert, so kann man doch für ein sehr kleines Zeitintervall so tun, als ob sie konstant wäre, und die obige einfache Rechenvorschrift anwenden. Die Analysis betrachtet nun tatsächlich unendlich kleine Zeitintervalle  $dt$  und bildet dann die unendliche Summe der kleinen Teilstrecken  $v(t) \cdot dt$ , bis der ganze interessierende Zeitraum überdeckt ist; man nennt dies eine „Integration“. Die numerische Integration tut dasselbe, nur dass die Zeitschritte (Integrationschritte)  $\Delta t$  eine endliche Grösse erhalten, z. B. 1 Sekunde. Die Tabelle zeigt das Prinzip einer numerischen Integration, die von der Beschleunigung

Zeit	Geschwindigkeit $v$ [m/s]	Ort $x$ [m]	Beschleunigung $a$ [m/s <sup>2</sup> ]	
$t_0$	$0$	$v_0 = v_0$	$x_0 = 0$	$a_0 = f(v_0, x_0)$
$t_1$	$\Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0 \cdot \Delta t$	$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \Delta t$	$a_1 = f(v_1, x_1)$
$t_2$	$2 \cdot \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \cdot \Delta t$	$x_2 = x_1 + v_1 \cdot \Delta t$	$a_2 = f(v_2, x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t_n$	$n \cdot \Delta t$	$v_n = v_{n-1} + a_{n-1} \cdot \Delta t$	$x_n = x_{n-1} + v_{n-1} \cdot \Delta t$	$a_n = f(v_n, x_n)$
$t_{n+1}$	$(n+1) \cdot \Delta t$	$v_{n+1} = v_n + a_n \cdot \Delta t$	$x_{n+1} = x_n + v_n \cdot \Delta t$	$a_{n+1} = f(v_{n+1}, x_{n+1})$

aufsteigt zur Geschwindigkeit und weiter zum Ort. In den grauen Feldern stehen die Startbedingungen, welche den Zustand des Geschosses zum Zeitpunkt  $t = 0$  beschreiben.

Ausgehend von diesen wird dann jeweils die herr-

schende Beschleunigung gemäss dem Kräftegleichgewicht aus Bild 1 berechnet. Diese Beschleunigung wird dann für den Zeitraum  $\Delta t$  beibehalten, um die neue Geschwindigkeit und den neuen Ort zu berechnen, daraus die neue Beschleunigung und so fort.

Damit der Computer jeweils die Beschleunigungen berechnen kann, muss man ihm noch Modelle für die Luft-Atmosphäre  $\rho(y)$  und den Luftwiderstandsbeiwert  $c_w(v)$  zur Verfügung stellen, aus welchen sich dann die Funktion  $f(v, y)$  in der Tabelle ergibt. Für  $\rho(y)$  benutzt man das ICAO-Modell, eine Standard-Atmosphäre, die für die Luftfahrt entwickelt wurde.  $c_w(v)$  muss man aufwendig messen und die Messpunkte dann durch eine geeignete Funktion nachzeichnen. Solche Funktionen nennt man „Fitting“-Funktionen: Sie haben keinerlei physikalische Bedeutung, man wählt sie nur wegen ihrer passenden Form – es gibt nämlich keine Formel zur Berechnung von  $c_w$ -Werten.

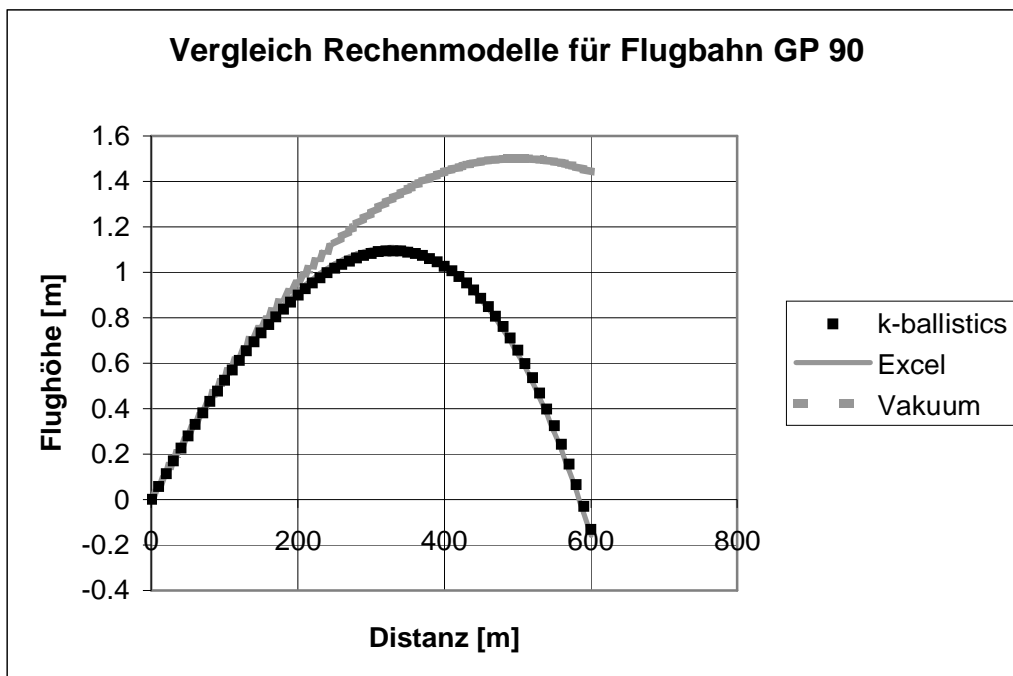


Bild 3



Ein solches numerisches Modell kann man sogar in Excel programmieren. Um den Aufwand klein zu halten, nehmen wir dazu eine konstante Luftdichte  $\rho$  und einen konstanten  $c_w$ -Wert (den Mittelwert, die graue Linie in Bild 2). Die grau ausgezogene Linie in Bild 3 zeigt das Resultat im Vergleich mit einem professionellen Modell (k-ballistics von Kneubuehl, schwarz gepunktet), welches als wahre Flugbahn betrachtet werden kann, und dem Vakuum-Modell (grau gestrichelt). Das Resultat des Excel-Modelles stimmt sehr gut, lässt sich aber wegen der getroffenen Vereinfachungen nur auf flache Flugbahnen anwenden.

### 3. Analysis vs. Numerik

Wenn es gelingt, die Gleichungen eines physikalischen Modelles mit den Mitteln der Analysis symbolisch zu lösen, so erhält man allgemeingültige Formeln, welche zum tieferen Verständnis der Prozesse beitragen; die numerische Behandlung liefert nur einen Haufen Zahlen zu einem konkreten Fall. Ausserdem kann man mit einer geschlossenen Formel jeden Zustand direkt berechnen, etwa die Flughöhe bei 150 m – mit einem numerischen Modell muss man immer zuerst alle vorangehenden Schritte ausführen. Aber leider lassen sich nur wenige Prozesse vollständig analytisch behandeln, wohingegen die Numerik mit fast allem fertig wird. Ein numerisches Modell versteht man am besten als Simulation, welche den wirklichen Prozess schrittweise nachbildet und zu jedem Zeitpunkt den Zustand des Systems vollständig beschreibt, was einem viel Zeit und Geld für aufwendige Experimente erspart und zuverlässige Voraussagen für konkrete Einzelfälle erlaubt.

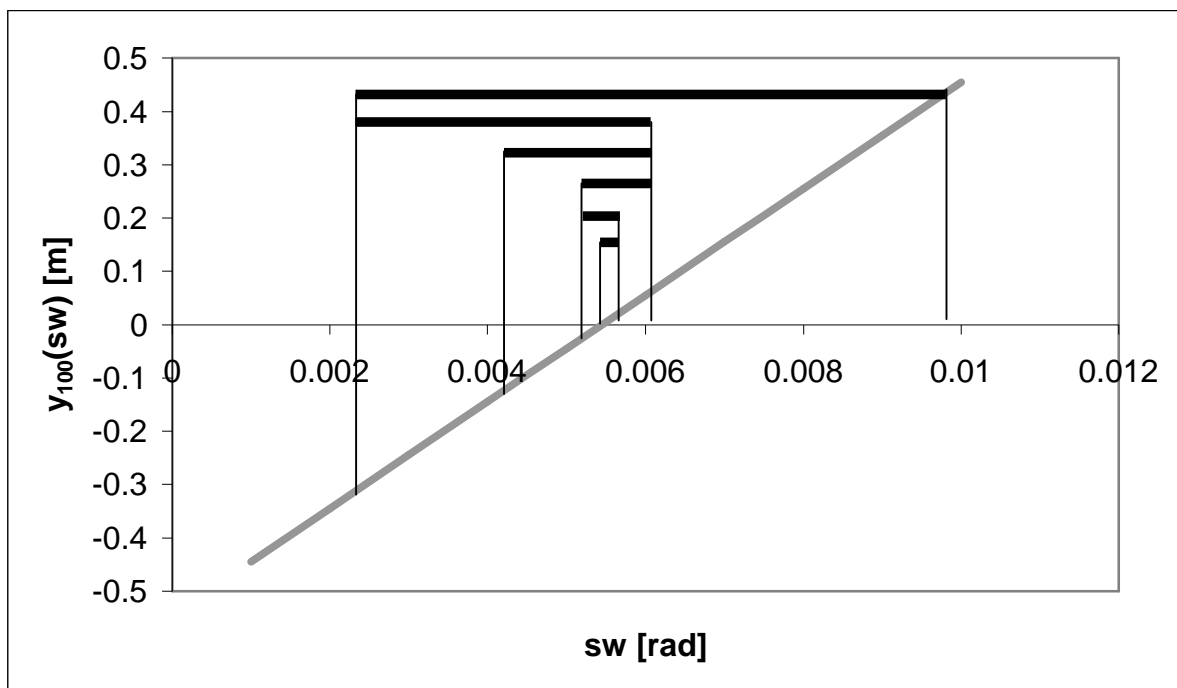


Bild 4

So wie man beim Schiessen einen Schusswinkel einstellt, dem Geschoss eine Geschwindigkeit erteilt und dann schaut, was passiert, so gibt man dem numerischen Modell die Startwerte ein und schaut ebenfalls, was passiert. Aber wie beantwortet man eine umgekehrte Fragestellung der Art: Welchen Schusswinkel muss ich einstellen, um auf 100 m Fleck zu treffen? Eine algebraische Formel kann man einfach nach der gesuchten Grösse umformen, aber den Ablauf der Simulation kann man nicht umkehren. Deshalb muss man wie auf dem Schiessstand auch einfach verschiedene Werte für den Schusswinkel eingeben, bis auf 100 m die gewünschte Flughöhe 0 m resultiert. Diese Sucherei kann man nun ebenfalls dem Computer überlassen, indem man ein Suchprogramm erstellt. Bild 4 zeigt, wie ein Programm systematisch die Nullstelle der grauen Funktion sucht, indem es für ein Start-Intervall prüft, ob sich an den Rändern die Vorzeichen wechseln – falls ja, muss das Intervall

eine Nullstelle enthalten. Das Such-Intervall wird dann immer weiter halbiert, bis die Nullstelle mit der verlangten Rechengenauigkeit eingegrenzt ist; dies ist das numerische Gegenstück zum algebraischen Gleichungen-Lösen.

#### **4. Grenzen der Machbarkeit**

In obigem Excel-Beispiel wurden erhebliche Vereinfachungen getroffen, um das Modell mit den gegebenen einfachen Mittel noch programmierbar zu halten. Durch Einsatz besserer Mittel kann man die Grenzen der Machbarkeit verschieben, wird jedoch immer wieder daran stossen.

Das in Bild 1 skizzierte physikalische Modell stellt das Geschoss als Massepunkt dar, dem dann gewissermassen nachträglich die Querschnittbelastung und der Luftwiderstandsbeiwert eines Körpers zugeordnet werden. Leider ist nun aber der Luftwiderstandsbeiwert nicht nur vom Geschoss abhängig, sondern auch von der Waffe, aus der es verfeuert wurde! Je nach Drallänge fallen nämlich die Abgangsstörungen Präzession und Nutation des Geschosses grösser oder kleiner aus, klingen langsamer oder schneller ab und das Geschoss findet einen anderen stationären Anstellwinkel. Es ist nun einleuchtend, dass ein kreiselndes Geschoss der Luft eine andere Angriffsfläche bietet als dasselbe Geschoss, wenn es schön mit der Spitze voran fliegt. Dies reduziert die Allgemeingültigkeit von publizierten  $c_w$ -Werten erheblich und die Lösung des Problems wäre, die Mikrobewegungen des Geschosses und dessen Luftumströmung ebenfalls in das Modell einzubeziehen. Weil diese Vorgänge sehr schnell sind, müssen sie in winzigen Zeitschritten berechnet werden, und da gleichzeitig die Anzahl zu berechnender Zustände grösser wird, nehmen Rechenzeit und Speicherbedarf erhebliches Ausmass an. Ausserdem setzt der chaotische Charakter von Strömungen der Genauigkeit solcher Modelle unüberwindbare Grenzen und verhindert, dass Messgerät und Zeit auf dem Schiessplatz vollständig durch Computer-Simulationen ersetzt werden können.

## Messtechnik

Mathematische Formeln und Algorithmen werden erst zu einem physikalischen Modell, wenn ihre Symbole oder nackten Zahlen durch Werte aus der Wirklichkeit ersetzt werden. Diese Werte gewinnt man dank der Messtechnik.

### 1. Die Messgrößen

Ein Schütze mag erstaunt feststellen, dass Ballistiker einen grossen Aufwand um die Messung der Geschossgeschwindigkeit machen, um dann daraus mit weiterem Aufwand die Flugbahn bzw. Flughöhen zu berechnen – warum messen sie dann nicht gleich die Flughöhen? Dies erscheint vernünftig, zumal man doch beim Beschuss von Scheiben automatisch die Flughöhe über der Visierlinie feststellen kann. Leider ist aber die Visierlinie eine schlechte Bezugslinie, da sie von Waffe zu Waffe stark variiert: Man denke nur an das Stgw 57 und an einen Jagdstutzer, beide im Kaliber GP 11! Weiter spricht gegen die Methode, dass man dazu Scheiben auf beträchtliche Distanzen exakt ausnivellieren müsste, um allgemeingültige Resultate zu erhalten, was letztendlich denselben Aufwand bringt wie Geschwindigkeitsmessungen (sich allerdings ohne Elektronik realisieren liesse). Das Hauptargument gegen die Messung von Flughöhen aber ist dies: Wenn ich eine Flugbahn genau vermessen habe, kenne ich nur genau die vermessene Flugbahn – wenn ich aber die Geschwindigkeiten messe, kann ich daraus alle möglichen Flugbahnen berechnen!

Um mit seinen Formeln arbeiten zu können, muss der Ballistiker folgende Größen messen können: Den Zustand der Atmosphäre (Temperatur, Luftfeuchtigkeit und Druck oder zumindest die Meereshöhe bei Verwendung der ICAO-Atmosphäre), die Mündungsgeschwindigkeit, Durchmesser und Gewicht des Geschosses sowie seinen Luftwiderstandsbeiwert  $c_w(v)$ . Letzterer kann wie die Mündungsgeschwindigkeit aus Geschwindigkeitsmessungen gewonnen werden, indem man aus mehreren Messungen auf verschiedene Distanzen die Verzögerung (den Geschwindigkeitsverlust, englisch: drag)  $D = \Delta v / \Delta x$  bestimmt. Diese ist dann mit dem  $c_w$ -Wert verknüpft durch

$$D = \Delta v / \Delta x = c_w(v) / q \cdot \rho(y) / 2 \cdot v \quad (q : \text{Querschnittbelastung}; \rho : \text{Dichte von Luft})$$

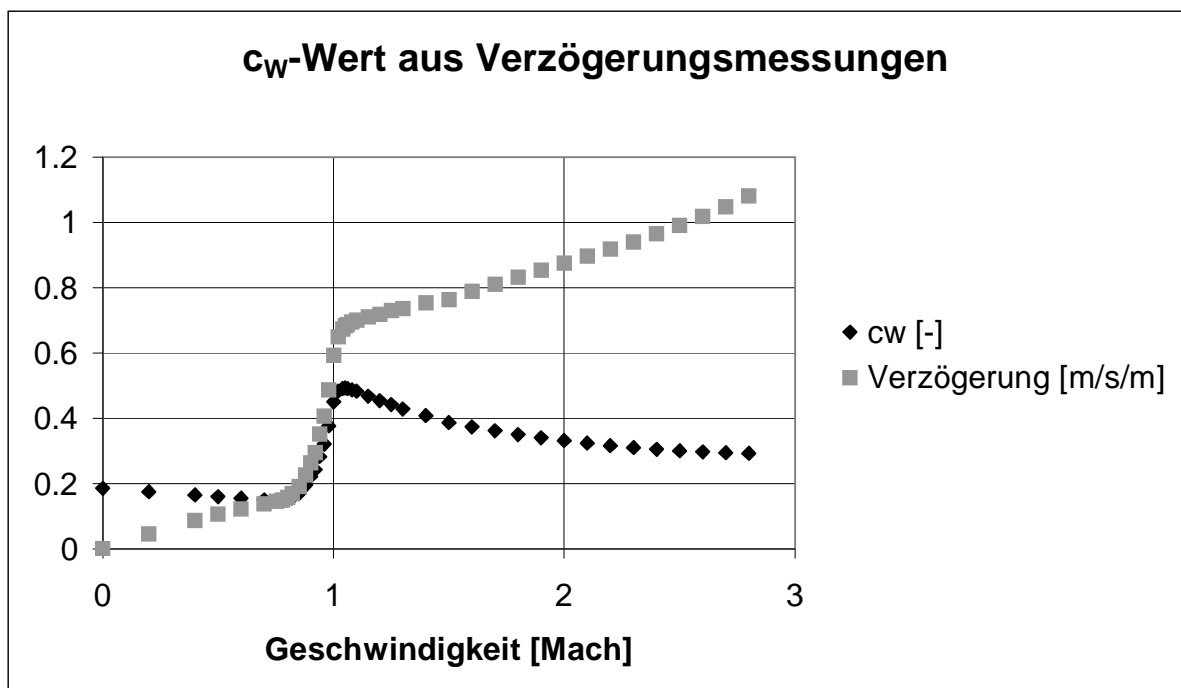


Bild 1

Bild 1 zeigt, wie man mit obiger Formel punktweise gemessenen Verzögerungen  $c_W$ -Werte zuordnen kann (Verzögerungen haben negatives Vorzeichen, das Bild zeigt Beträge). Je mehr Punkte man messen kann, umso feiner gelingt die Zeichnung des Gesamtverlaufes, der Drag-Funktion – was aber natürlich einen erheblichen Aufwand bedeutet. (Im Diagramm ist die Geschwindigkeit als „Machzahl“ angegeben. Dies ist nichts anderes, als die Geschwindigkeit geteilt durch die Schallgeschwindigkeit, welche typischerweise 340 m/s beträgt.)

Jedenfalls scheinen die Ballistiker recht zu haben, wenn sie sich auf die Messung von Geschwindigkeiten konzentrieren, denn schliesslich ist das getreuliche Nachzeichnen einer Flugbahn bei weitem nicht die wichtigste Aufgabe eines Ballistikers: Berechnung von Schusswinkeln, Geschossenergien und Querwindempfindlichkeit sind viel wichtiger, und all dies gelingt mit Kenntnis der Geschwindigkeit.

## 2. Das Messgerät

Messen heisst, einer Grösse eine Zahl zuzuordnen. Dazu vergleicht man sie mit einem Standard, welcher die Einheit gibt (etwa das berühmte Ur-Meter in Paris als Standard zum Vergleich räumlicher Abstände von Punkten). Oft genug ist aber so ein direkter Vergleich nicht möglich, sondern man muss das interessierende System mit einem anderen wechselwirken lassen, um aus der Stärke der Wechselwirkung auf die gesuchte Grösse rückschliessen zu können.

Die älteste Methode, um Geschossgeschwindigkeiten zu messen, ist das ballistische Pendel (Bild 2). Dazu schießt man in einen hängenden Kugelfang, misst dessen Auslenkung (Winkel oder Höhe) und rechnet mit Energie- und Impulserhaltungssatz zurück auf die Geschossgeschwindigkeit.

Natürlich stoppt dieser Messvorgang den Geschossflug und es ist nicht möglich, an einem einzigen Schuss die Geschwindigkeiten auf verschiedene Distanzen zu messen.

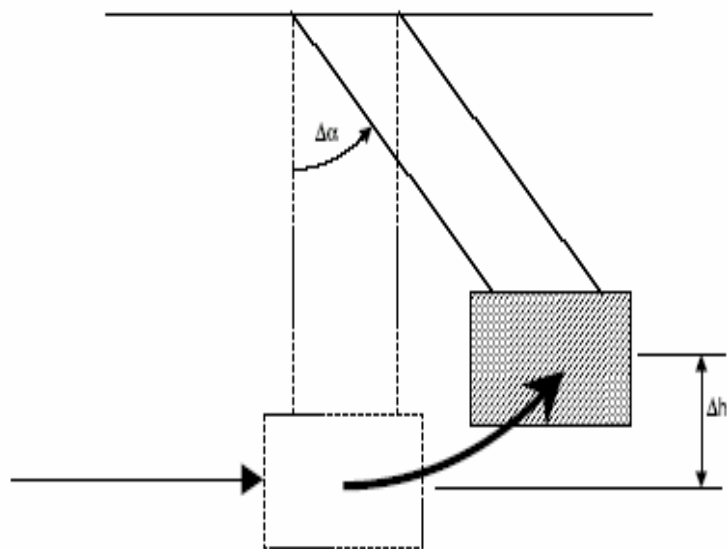


Bild 2



Dazu bräuchte man eine berührungsfreie Messmethode: Die moderne Technik der Lichtschranke ermöglicht dies und Geräte wie in Bild 3 links sind heute weit verbreitet. Damit macht man eigentlich eine Zeitmessung (siehe Bild 4), denn beim Durchfliegen der ersten Schranke wird eine Uhr gestartet und beim Durchfliegen der zweiten gestoppt; die Geschwindigkeit ist dann Strecke  $d$  geteilt durch Zeitdifferenz  $t_2 - t_1$ . Im Gegensatz zum ballistischen Pendel misst man deshalb eigentlich nicht die momentane Geschwindigkeit im Punkt  $X$ , sondern die mittlere Geschwindigkeit über die Strecke  $d$ ; ist diese kurz genug, darf sie jedoch als momentane Geschwindigkeit genommen werden.

Solche photometrischen Geräte haben den Nachteil, auch schon durch die blosse Verdunkelung durch Gase ihr Triggersignal an die Uhr zu senden. Deshalb kann man mit ihnen wegen der Mündungsgase nicht Mündungsgeschwindigkeiten messen, sondern erst etwa ab 3 m. Aus demselben Grund haben die Geräte auch Mühe, subsonisch fliegende Geschosse zu messen: Diesen fliegt nämlich eine Welle verdichteter Luft mit Schallgeschwindigkeit voraus und das Gerät misst die Geschwindigkeit dieser Welle statt des Geschosses! Dieses Problem betrifft namentlich Geschossgeschwindigkeiten im Bereich von 300 m/s bis Schallgeschwindigkeit – darunter ist die Energie zu gering, um eine bedeutende Welle zu erzeugen.

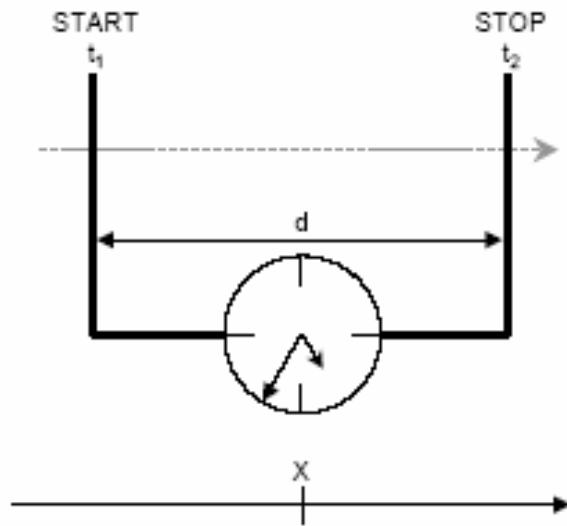


Bild 4

Man kann auch andere Triggersignale verwenden als Lichtschranken, das Prinzip bleibt dasselbe. Wichtig ist vielmehr, eine genaue Uhr zu haben, denn die zu messende Zeitdifferenz beträgt bloss etwa 2 ms! Als es so genaue Uhren noch nicht gab, ersann Boulengé einen besonderen Trick: Er benutzte als Uhr einen schweren Fallstab! Das erste Triggersignal liess den Stab fallen, das zweite markierte darauf mit einer Kerbe, wie weit er in der Zwischenzeit gefallen war; aus der Kenntnis der Erdanziehungskraft konnte man daraus die Zeit und somit die Geschossgeschwindigkeit erschliessen. Der Boulengé-Apparat konnte allerdings die Auflösung von 2 ms nicht erreichen und war zur Geschwindigkeitsmessung von Gewehrkugeln eher ungeeignet.

Sehr aufwendig, aber auch sehr vollständig ist die Messung mit Radar. Wenn man mit einem Radarstrahl dem fliegenden Geschoss folgen kann, so erhält man mit einem einzigen Schuss dessen vollständiges Geschwindigkeitsprofil über die ganze Flugdistanz. Dies ist natürlich der Idealfall, um einen  $c_W$ -Verlauf zu bestimmen, aber die Investitionen in technische Apparatur sind so gross, dass selbst die meisten Munitionshersteller darauf verzichten.

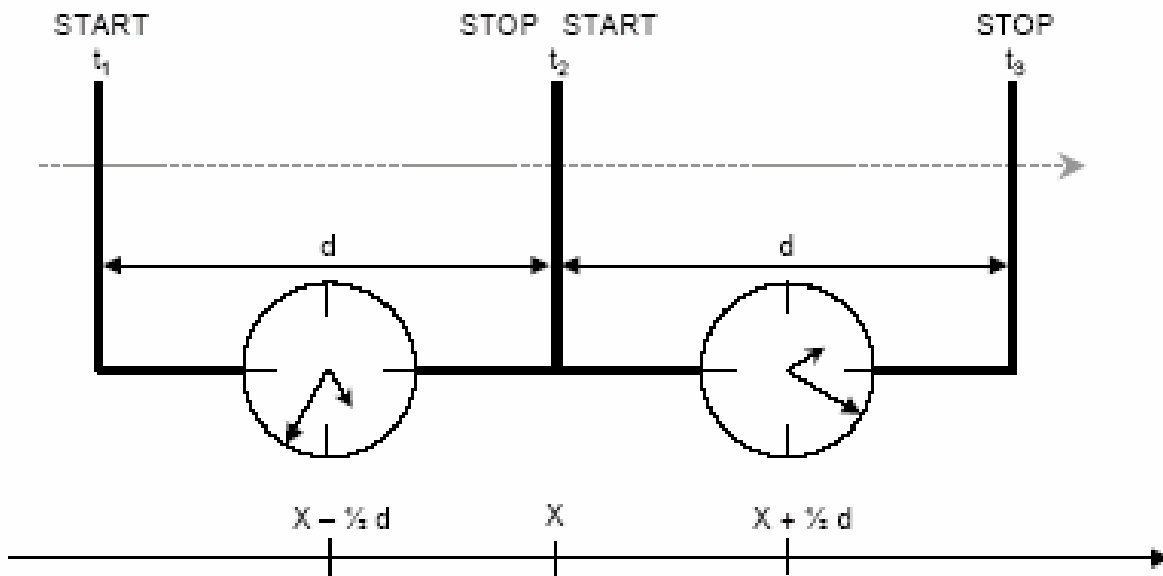


Bild 5

Man kann einen  $c_W$ -Verlauf aber nicht nur mit Radar, sondern mit jeder berührungsfreien Geschwindigkeits-Messmethode bestimmen. Bild 5 zeigt schematisch eine Vorrichtung aus zwei in Serie arbeitenden Lichtschranken-Geräten. Das erste misst die Geschwindigkeit in  $X - \frac{1}{2} d$ , das zweite in  $X + \frac{1}{2} d$ . Gemeinsam jedoch messen sie die Geschwindigkeit in  $X$  gemäss

$$v(X) = 2 \cdot d / (t_3 - t_1)$$

und am selben Ort  $X$  zugleich die Verzögerung

$$(\Delta v / \Delta x)_X = 1 / (t_3 - t_2) - 1 / (t_2 - t_1)$$

Je ein solches Gerätepaar ergäbe dann einen Punkt auf der roten Kurve von Bild 1. Offensichtlich ist also die Ermittlung eines  $c_W$ -Verlaufes so oder so mit grossem Aufwand verbunden, weshalb dieses an sich richtige physikalische Konzept nur geringe Popularität genießt und eigentlich veraltete Methoden immer noch verbreitet sind.

## Der Ballistische Koeffizient

Das Konzept des Ballistischen Koeffizienten BC stammt aus der Zeit vor dem Computer. Der BC ist eine Kennzahl für die Flugeigenschaften eines Geschosses und somit eine Alternative zum physikalischen Luftwiderstandsbeiwert  $c_w$ . Obwohl eigentlich veraltet, erfreut sich der BC – namentlich in den USA – weiterhin grösster Beliebtheit.

### 1. Die Grundidee

Alle Flugbahnen ähneln sich (Bild 1): Sie sind eine Art Wurfparabel mit gestauchtem absteigendem Ast. Selbst die extrem gestreckte Flugbahn der 6mm Norma BR würde, verfolgt über eine Distanz von 2000 m, den krummen Flugbahnen der Rundkugeln zu ähneln beginnen. Deshalb drängt sich folgende Ueberlegung auf: Aus einer bekannten „Mutter“-Flugbahn müssten sich alle anderen Flugbahnen durch Ziehen und Strecken in Raum und Zeit beschreiben lassen.

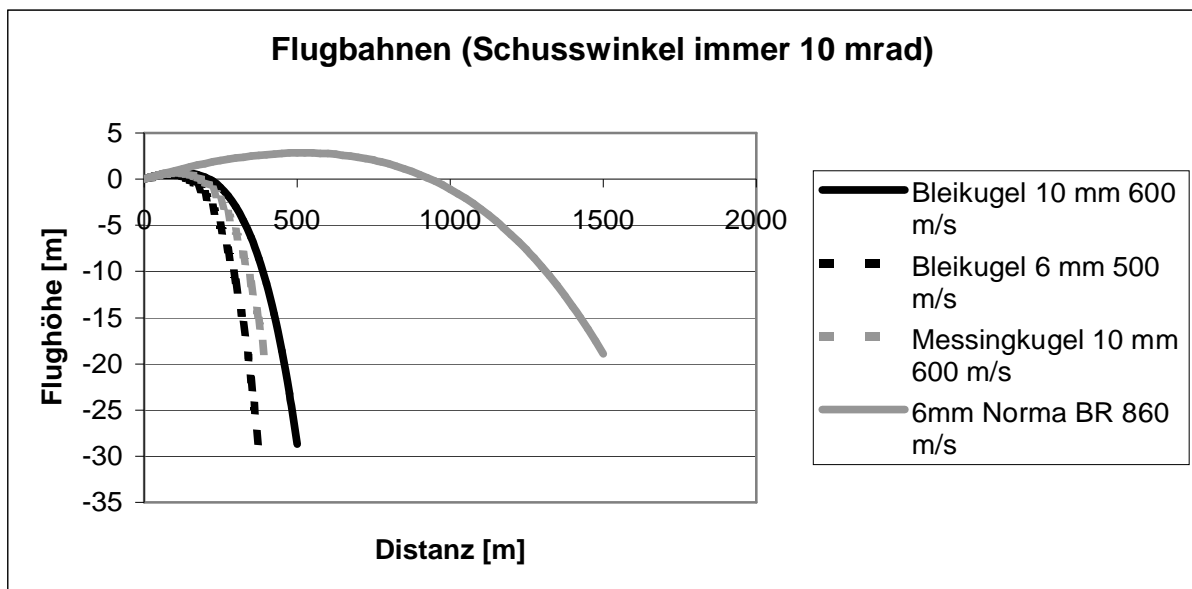


Bild 1

Die Flugbahn-Funktion  $y(x)$  selbst allerdings ist nicht nur eine Funktion des Geschosses, sondern auch von Schusswinkel und Mündungsgeschwindigkeit. Um diese Abhängigkeiten zu umgehen, wenden wir die Aufmerksamkeit auf die Verzögerung  $D(v)$ , den Geschwindigkeitsverlust pro Meter (engl.: drag) bei einer gewissen Geschwindigkeit. Dies ist auch physikalisch sinnvoll, denn nebst der Erdbeschleunigung ist schliesslich der Luftwiderstand für die Krümmung der Flugbahn verantwortlich, und der bewirkt unmittelbar die Verzögerung des Geschosses.

Bild 2 zeigt die Verzögerungsfunktionen  $D(v)$  zu den Geschossen aus Bild 1. Bei Betrachtung der Funktionen der Rundkugeln erkennen wir, dass sich bei jeder Geschwindigkeit  $v$  paarweise ein konstantes Verhältnis ergibt: Das Verhältnis von  $D_{\text{Bleikugel10mm}}$  zu  $D_{\text{Bleikugel6mm}}$  ist bei jeder Geschwindigkeit 0.6, das von  $D_{\text{Bleikugel10mm}}$  zu  $D_{\text{Messingkugel10mm}}$  ist immer 0.75.

Aus dieser Beobachtung leiten wir nun folgende Methode ab: Wir definieren die 10 mm-Bleikugel als Referenz-Geschoss. Mit grossem Aufwand vermessen wir vollständig ihren Geschwindigkeitsverlauf und ihre Verzögerungsfunktion  $D(v)$ . Von einem Prüfgeschoss messen wir dann nur noch bei einer beliebigen Geschwindigkeit die Verzögerung und definieren das Verhältnis Verzögerung Referenz-Geschoss / Verzögerung Prüf-Geschoss als Ballistischen Koeffizienten. Da dieser Koeffizient für alle Geschwindigkeiten gleich bleibt

(gemäss Bild 2), können wir aus der bekannten Verzögerungsfunktion des Referenz-Geschosses auch die vollständige Verzögerungsfunktion des Prüfgeschosses berechnen und daraus weiter mittels geeigneter Raum- und Zeit-Funktionen dessen Flugbahn. Der messtechnische Vorteil der Methode ist offensichtlich: Man braucht nur ein einziges Geschoss – das Referenz-Geschoss – vollständig zu vermessen oder berechnen und von allen anderen braucht man nur noch die Verzögerung bei einer beliebigen Geschwindigkeit, was mit nur einer Messung zu bewerkstelligen ist!

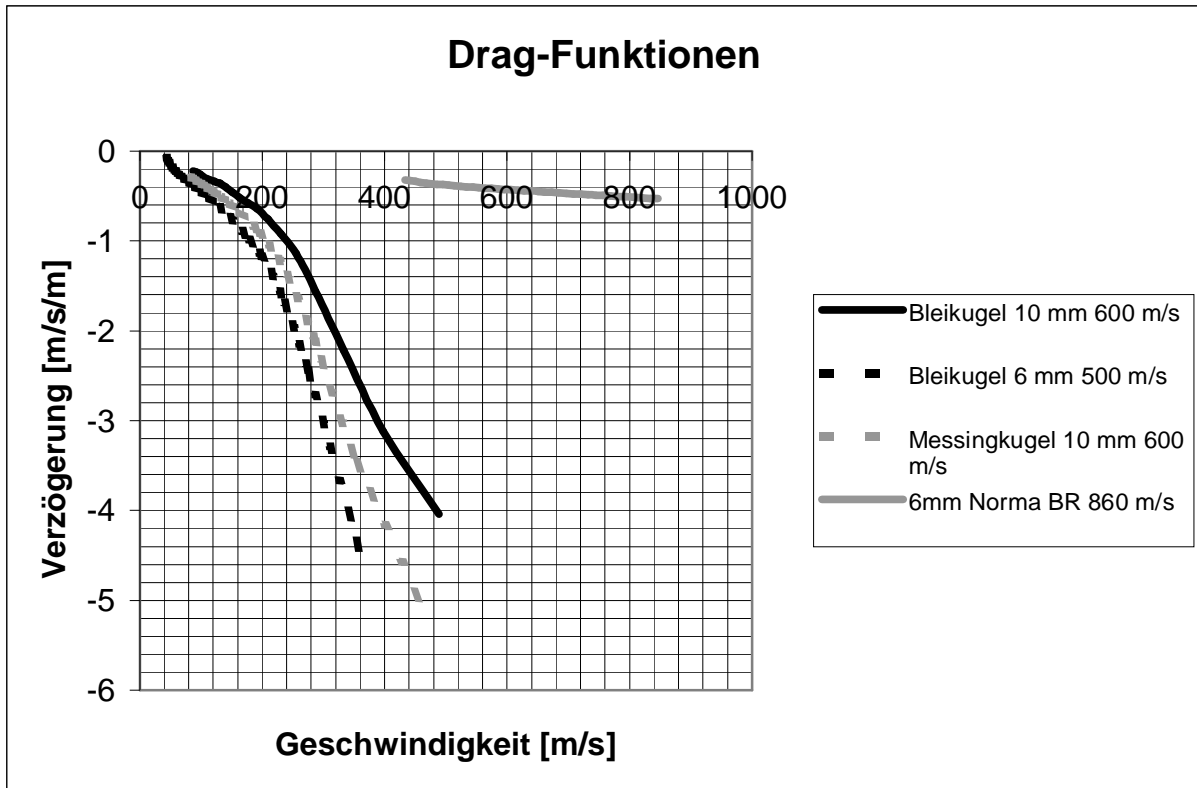


Bild 2

## 2. Die Verwirklichung

Oben dargestellte Grundidee entstand etwa um 1850. Der italienische Ballistiker Siacci realisierte sie als erster gegen 1900, indem er in mühsamer Handarbeit die Flugbahn eines einfachen, berechenbaren Geschosses bestimmte und Rechenregeln angab, wie diese Referenz-Flugbahn unter Verwendung eines Koeffizienten in die Flugbahn eines beliebigen Geschosses umgeformt werden konnte.

Die deutsche Firma Krupp führte später mit einem Standard-Geschoss (Bild 3) zahlreiche Versuche durch und publizierte die Resultate, aus welchen der russische Ballistiker Mayewski ein mathematisches Modell für die Verzögerung dieses Krupp-Geschosses entwickelte. Andere Versuche zeigten, dass sich das Artillerie-Geschoss von Krupp gut eignete, um auch die Flugeigenschaften von Kleinwaffen zu beschreiben. Dies führte schliesslich zu den berühmten Tabellen des amerikanischen Armee-Ballistikers Ingall, welcher Siaccis Formeln in einfach anzuwendende Tabellen umarbeitete und als Referenz das Krupp-Geschoss wählte, dargestellt durch Mayewskis mathematisches Modell.

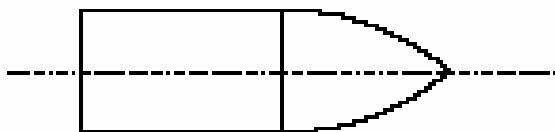


Bild 3



Bild 2 macht jedoch deutlich, dass ein einziges Referenz-Geschoss nicht auf alle Prüfgeschosse angewandt werden kann – die Drag-Funktion des 6 mm BR Geschosses zeigt kein konstantes Verhältnis zu den Drag-Funktionen der Rundkugeln. Aus diesem Grund publizierte die Firma Winchester Mitte der sechziger Jahre einen Satz von vier Referenz-Geschossen, mit denen man die Flugbahnen gängiger Kleinwaffen-Kugeln sehr genau berechnen kann. Aus diesem Satz von vier Modellen ist das sogenannte G<sub>1</sub>-Modell praktisch identisch mit dem Geschoss von Ingall und eignet sich nach Angaben des Geschoss-Herstellers Sierra sehr gut zur Beschreibung ihrer Geschosse. Um auf obiges Rundkugel-Beispiel zurückzukommen: Unter Verwendung einer 10 mm Bleirundkugel als Referenzgeschoss erhält eine 6 mm Bleirundkugel den ballistischen Koeffizienten 0.6 und eine 10 mm Messingrundkugel einen von 0.75. Es ist jedoch nicht möglich, mit diesem Referenz-Geschoss dem langen 6 mm BR einen Koeffizienten zuzuordnen und folglich auch nicht möglich, dessen Flugbahn aus derjenigen der 10 mm Bleikugel abzuleiten – man braucht ein anderes Referenz-Modell.

Man kann den BC und den Luftwiderstandsbeiwert  $c_W$  in Beziehung setzen. Der BC definiert sich als  $BC = D_{Ref}(v) / D_{Prüf}(v)$ , wobei für  $D(v)$  eines Geschosses gilt:

$$D(v) = c_W(v)/q \cdot \rho(y)/2 \cdot v \quad (q : \text{Querschnittbelastung; } \rho : \text{Dichte von Luft}).$$

Daraus folgt bei gleicher Luftdichte und gleicher Geschwindigkeit  $v$ :

$$BC = c_{W,Ref}(v)/c_{W,Prüf}(v) \cdot q_{Prüf}/q_{Ref}$$

Der BC ist also nur konstant, wenn auch  $c_{W,Ref}(v)/c_{W,Prüf}(v)$  für alle  $v$  denselben Wert liefert, ansonsten muss man sagen  $BC = BC(v)$ . In der Tabelle findet man BC-Werte von Sierra und man sieht, dass die meisten mit der Geschwindigkeit variieren. Dies ist ein Indiz dafür, dass die Übereinstimmung mit dem Referenz-Modell nicht vollständig ist und bereichsweise korrigiert werden muss. Namentlich im turbulenten transsonischen Bereich (Geschwindigkeiten um 340 m/s) ist die Übereinstimmung immer sehr schlecht und die BC-Methode versagt.

Aus letztgenannter Formel lässt sich eine alternative Definition des BC ableiten:

$$BC = q_{Prüf} / i,$$

wobei  $i$  einen Formfaktor bezeichnet. Dieser besteht aus den  $c_W$ -Werten von Prüf- und Referenzgeschoss, aber auch aus der Querschnittbelastung des Referenz-Geschosses. Da diese für das Krupp'sche Artillerie-Geschoss, welches als Referenz dient, sehr hoch ist, haben auch die besten Kleinwaffen-Geschosse immer einen BC von weniger als 1.

Sierra Matching HPBT			v [m/s]														
Dia. [inch]	Masse [grs]	Masse [g]	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000	1050	1100
0.224	52	3.37	0.212				0.218				0.225						
0.224	69	4.47	0.317				0.305				0.301						
0.243	107	6.93	0.495	0.509	0.522				0.527								
0.308	168	10.89	0.405	0.424			0.447				0.462						
0.308	175	11.34	0.485			0.496				0.505							
0.308	190	12.31	0.515	0.525			0.533										
0.308	200	12.96	0.560				0.565										
0.308	220	14.26	0.608	0.624			0.629										
0.308	240	15.55	0.685			0.702				0.711							
0.338	250	16.20	0.576	0.606			0.587										
0.338	300	19.44	0.750			0.760			0.768								

### **3. Kritische Würdigung**

Die Methode des BC wurde entwickelt, als noch keine Computer in sekundenschnelle die schrittweise Integration der Flugbahn vornehmen konnten und mit Bleistift und Papier anwendbare Verfahren dringend notwendig waren. Ausserdem löste der BC gleichzeitig noch ein messtechnisches Problem, weil dank ihm die Flugeigenschaften eines Prüfgeschosses mit einer einzigen Messung bestimmt werden konnten. Dass der BC trotz Computer und erschwinglichem, gutem Messgerät bis heute so populär geblieben ist, liegt daran, dass er ein Kommunikationsproblem löst: Anstatt die Flugeigenschaften eines Geschosses physikalisch korrekt durch eine Tabelle von  $c_w$ -Werten zu verschiedenen Geschwindigkeiten darzustellen, genügt die Angabe einer einzigen Zahl, die sich leicht in einem Katalog angeben lässt.

Dies kommt daher, dass der BC eigentlich gar keine physikalische Grösse ist, sondern eher eine Kodierung der Flugeigenschaften eines Geschosses, welche sich nur unter Angabe des Referenz-Modells entschlüsseln lässt; die komplizierte Physik wird einfach im Referenz-Geschoss versteckt. Um dies ganz deutlich zu machen: Mit Hilfe einer  $c_w$ -Tabelle aus Messungen kann jeder Physik-Student die Flugbahn eines Geschosses berechnen, nur aus dem BC hingegen nicht – er muss zusätzlich das zugehörige Referenz-Modell kennen.

Wenn man es mit dem BC so genau nimmt wie Sierra und ihn geschwindigkeitsabhängig publiziert, so schwinden dessen mess- und kommunikationstechnischen Vorteile rasch dahin und man könnte auch gleich mit  $c_w$ -Verläufen arbeiten. Für weniger genaue aber dafür feldtaugliche Tabellen oder vereinfachte Computerprogramme hingegen eignet sich der BC allemal.

## Messungen mit Lichtschranken

Als Grundlage für ausserballistische Berechnungen (Flugbahntabelle, Schusstafel, Visierkorrekturtabelle) muss man die Mündungsgeschwindigkeit  $v_0$  kennen sowie ein Mass für die Flugeigenschaften des Geschosses. Im Folgenden wird dargestellt, wie man mit handelsüblichen Lichtschranken-Geschwindigkeitsmessgeräten mit guter Genauigkeit die Mündungsgeschwindigkeit und den ballistischen Koeffizienten BC als Mass für die Flugeigenschaften bestimmen kann.

### 1. Bestimmung der $v_0$

Die Messung der Mündungsgeschwindigkeit ist ein Problem, weil die meisten Methoden zur Geschwindigkeitsmessung – dies gilt namentlich für Lichtschranken-Geräte – eigentlich eine Zeitspanne messen: Die Zeitspanne  $\Delta t$  nämlich, welche das Geschoss braucht, um die Messstrecke  $d$  zurückzulegen (für Lichtschranken-Geräte ist  $d$  typischerweise 0.5 m bis 1.0 m). Wenn das Geschoss in die Messstrecke eintritt, startet ein Triggersignal die Zeitmessung, wenn es wieder austritt, stoppt ein zweites Triggersignal dieselbe. Die mittlere Geschwindigkeit über der Messstrecke  $v = d / \Delta t$  wird dann als momentane Geschwindigkeit des Geschosses in der Mitte der Messstrecke betrachtet.

Bild 1 zeigt nun Folgendes: Um die Mündungsgeschwindigkeit  $v_{x=0}$  zu messen, müsste das startende Triggersignal hinter der Mündung liegen, was technisch nicht realisierbar ist; der mündungsnaheste Ort, für welchen man mit einer solchen Anordnung die Geschwindigkeit messen könnte, wäre offensichtlich  $x = d/2$ . Wird das Triggersignal durch eine Lichtschranke ausgelöst, lässt sich selbst diese eingeschränkte Messung der Mündungsgeschwindigkeit immer noch nicht realisieren, da in solcher Mündungsnähe die austretenden Gase das Signal verfälschen; bei Faustfeuerwaffen ist in der Regel ein Abstand von  $x = 3$  m einzuhalten, bei Gewehren gar einer von 5 m.



Bild 1

Wie kann man denn nun die Mündungsgeschwindigkeit  $v_0$  messen? Tatsächlich braucht man dazu zwei Geschwindigkeitsmessungen, eine im Abstand  $A$  (wie erwähnt typisch 3 – 5 m) und eine im Abstand  $2 \cdot A$  (also 6 – 10 m), womit man die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_{2A}$  erhält. Gemäss Bild 2 ist über so kurze Distanzen für alle Kaliber die Geschwindigkeitsabnahme praktisch konstant und man berechnet deshalb die Mündungsgeschwindigkeit gemäss

$$v_0 = 2 \cdot v_A - v_{2A}$$

Diese notwendige Messung zweier Geschwindigkeiten kann entweder unter Einsatz zweier Messgeräte geschehen oder aber man benutzt nur eines und misst zuerst auf die eine Distanz, dann auf die andere. Die Entscheidung ist eine Kostenfrage: Beim Einsatz nur eines

Gerätes braucht man die doppelte Anzahl Patronen, dafür spart man sich die Beschaffung eines zweiten Gerätes; je nach Kosten der Munition und Häufigkeit solcher Messungen empfiehlt sich die eine oder andere Variante. Jedenfalls sollten für die Rechnung jeweils die Mittelwerte aus mindestens fünf Messungen benutzt werden und nicht Einzelwerte; man braucht also mindestens 5 bzw. 10 Patronen zur Ermittlung der Mündungsgeschwindigkeit.

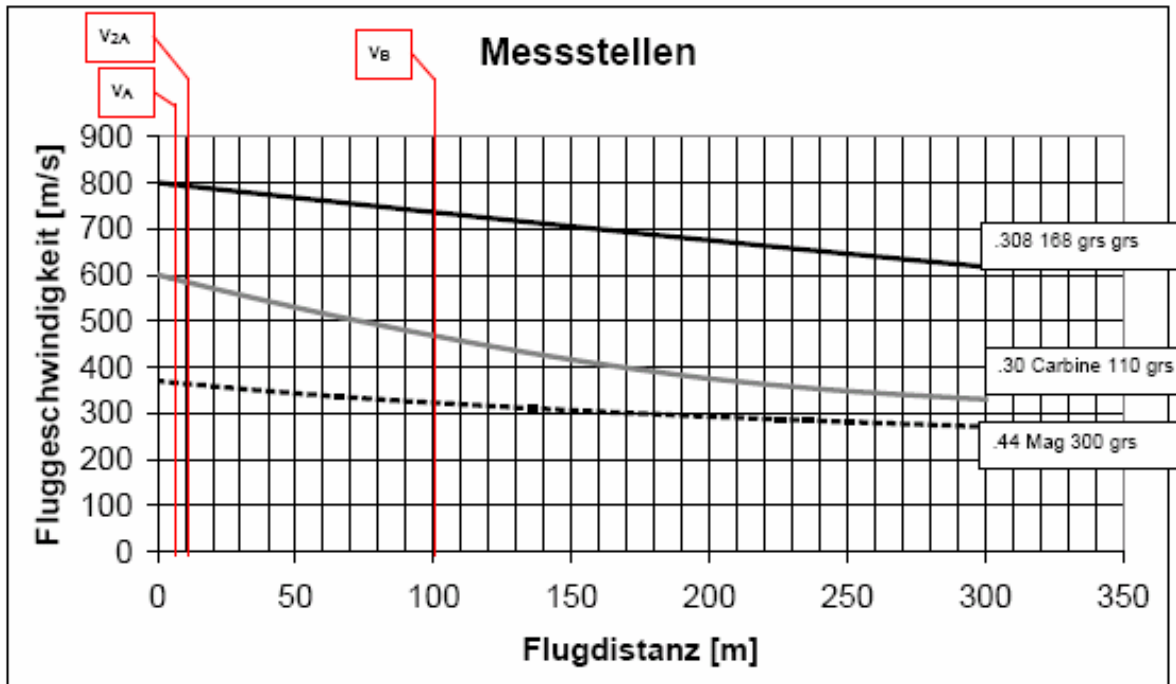


Bild 2

## 2. Bestimmung des BC

500 m. ü. M.

$v_{100} / v_0$	BC
0.950	0.721
0.945	0.654
0.940	0.598
0.935	0.551
0.930	0.510
0.925	0.475
0.920	0.444
0.915	0.417
0.910	0.392
0.905	0.371
0.900	0.351
0.895	0.334
0.890	0.318
0.885	0.303
0.880	0.289
0.875	0.277
0.870	0.266
0.865	0.255
0.860	0.245
0.855	0.236
0.850	0.228
0.845	0.220
0.840	0.212
0.835	0.205
0.830	0.199

Tabelle 1

Der BC ist nicht das beste Mass für die Flugeigenschaften eines Geschosses, aber dasjenige, das am einfachsten zu bestimmen und zu handhaben ist. Die folgende Methode zu seiner Bestimmung ist nicht die exakte, aber sie ist genügend genau und relativ einfach zu realisieren; vorausgesetzt wird die Kenntnis der Mündungsgeschwindigkeit (zu ermitteln wie oben beschrieben). Wegen der getroffenen Vereinfachungen gilt die Methode nur für Flachbahn-Waffen und nicht für Artillerie. Zur Ermittlung des BC brauchen wir eine Lichtschranke im Abstand B, um zusätzlich zur  $v_0$  noch die Geschwindigkeit  $v_B$  zu ermitteln, ebenfalls als Mittelwert aus mindestens fünf Messungen. Daraus berechnen wir dann den BC gemäss

$$BC = - 0.00037 \cdot B / \ln (v_B / v_0)$$

oder bestimmen den Wert für  $B = 100$  m aus Tabelle 1, geltend für Messungen auf einer Meereshöhe von 500 m. ü. M.

Die dritte Messstelle bei 100 m mag manchem schwierig zu realisieren erscheinen und er wird gar fürchten, sein Messgerät zu zerschliessen. Dazu folgende Ueberlegungen:

1. Für die Einsatzdistanzen von Faustfeuerwaffen, Maschinenpistolen und Jagdgewehren ist das Vakuum-Modell als Rechengrundlage genau genug; zu seiner Anwendung genügt die Kenntnis der  $v_0$  und man kann

sich die Mühsal einer dritten Messstelle überhaupt ersparen.

2. Der Aufwand einer dritten Messstelle zur Bestimmung des BC lohnt sich nur für weitreichende Präzisionsgewehre. Die Verzögerung derer Geschosse sollte man aber erst ermitteln, nachdem die Abgangsstörungen abgeklungen sind und das ist erst nach 100 m sicherlich der Fall. Schliesslich kann man mit einer solchen Waffe auch leicht auf 100 m durch ein Lichtschranken-Gerät schiessen, ohne dieses zu beschädigen.

Wer dennoch den BC einer Faustfeuerwaffe ermitteln will (z. B. Silhouetten-Schützen), der kann die Geschwindigkeit auch in z. B.  $B = 50$  m ermitteln und benutzt die obige Formel. Die Werte sind brauchbar, der Faktor 0.00037 wurde allerdings für  $B = 100$  m optimiert.

Wir überprüfen die Methode in einer gut ausgestatteten Testanlage, die über insgesamt fünf Lichtschranken verfügt und pro Schuss die Werte  $v_5$ ,  $v_{10}$ ,  $v_{100}$ ,  $v_{200}$  und  $v_{300}$  liefert. Die Patrone ist eine Norma Diamond Line Kal. .308 Winchester mit einem Sierra Matchking Geschoss von 190 grs Masse, die Waffe ist ein Präzisionsgewehr mit einer Dralllänge von 11". Nach einer Serie von fünf Schuss berechnen wir aus den Mittelwerten von  $v_5$  und  $v_{10}$  die Mündungsgeschwindigkeit  $v_0 = 757$  m/s. Mit dem Wert  $v_{B=100m} = 707$  m/s finden wir mit obiger Formel  $BC = 0.541$ . Diesen Wert geben wir ein in die Software „k-ballistics 3.11“ von Kneubuehl und erhalten Geschwindigkeitswerte wie in Tabelle 2 in der Spalte „Schätzung“ aufgelistet. Zum Vergleich tun wir dasselbe mit dem  $BC = 0.533$ , den Sierra für ihr Geschoss angeben, und stellen dann die beiden Rechnungen den Messwerten gegenüber (alles gemäss Tabelle 2). Diese Gegenüberstellung zeigt nun für dieses Experiment, dass der mit angegebener Methode geschätzte BC die Flugeigenschaften des Geschosses tatsächlich besser beschreibt als der Katalogwert.

x [m]	Geschwindigkeit $v_x$ [m/s]		
	Messung	Katalog BC = 0.533	Schätzung BC = 0.541
5	755	-	-
10	753	-	-
100	707	706	707
200	659	657	658
300	611	610	612

Tabelle 2

### 3. Beurteilung

Wenn man bedenkt, dass Mündungsgeschwindigkeit und Flugeigenschaften eines Geschosses nicht nur von der Lauflänge der Waffe abhängen, aus der es verschossen wird, sondern auch noch von deren Dralllänge, so versteht man, dass Katalog-Daten nicht zu trauen ist: Wer benutzt schon exakt die Testwaffe, die zu deren Ermittlung eingesetzt wurde? Wer es genauer wissen will, muss folglich selber messen.

Obige Methoden sind nicht im wissenschaftlichen Sinne exakt, aber sie wurden sorgfältig abgewogen in Bezug auf Aufwand und Nutzen. Sie sind optimiert für Flugbahnen von Flachbahn-Waffen, zu deren Erforschung nicht dieselben Mittel zur Verfügung stehen wie etwa für Artillerie und Raketen. Obwohl angenehm genau, muss man die Resultate doch als Schätzungen bezeichnen – genauere Werte würden allerdings die Investitionen in Testanlagen geradezu vertausendfachen.

## Der Luftwiderstand

Bei der Berechnung der Flugbahn ist die Berücksichtigung des Luftwiderstandes das Hauptproblem; weshalb dieser sich so „unfreundlich“ verhält, sei im Folgenden dargestellt. Da dieselben Ueberlegungen zugleich auch die Entwicklung des berühmten Uberschallknalls erklären, sei dieser als Exkurs gleich mitbehandelt.

### 1. Der Flug durch Luft

Wo sich das Geschoss seinen Weg durch die Luft bahnt, muss es natürlich die Luft verdrängen, die in seinem Weg liegt. Je schneller das Geschoss fliegt, umso schneller muss die Luft ihm ausweichen, wobei die eigene Trägheit der Luft, die ja nicht frei von Masse ist, dieser Fluchtbewegung Grenzen setzt. Grundsätzlich geschieht dasselbe, wie wenn man einen Stein ins Wasser wirft: Die Verdrängung des Mediums (Luft oder Wasser) bewirkt in diesem eine Störung, die sich kreis- bzw. kugelförmig von der Quelle der Störung wegbewegt.

Da Luft im Gegensatz zu Wasser kompressibel ist, erzeugt das schnelle Geschoss eine Dichte- bzw. Druckwelle (die beiden Größen sind für Gase gekoppelt). Die Geschwindigkeit, mit welcher sich diese Welle im Medium ausbreitet, heisst „Schallgeschwindigkeit“; sie beträgt für Luft bei 20°C etwa 340 m/s. Zur vereinfachten Darstellung der folgenden Phänomene definiert man die

dimensionslose Geschwindigkeit „Machzahl“  $M$ , welche das Verhältnis der Geschwindigkeit  $v$  eines Körpers zur herrschenden Schallgeschwindigkeit  $a$  angibt; die Schallgeschwindigkeit selbst erhält so also den Wert Mach 1.

Bild 1 zeigt zuerst ein Geschoss, dass mit Unterschallgeschwindigkeit fliegt (subsonisch), d.h. seine Geschwindigkeit  $v$  ist kleiner als die Schallgeschwindigkeit  $a$  und die Machzahl somit  $M < 1$ : Die verursachte Druckwelle eilt dem Geschoss voraus und ein Beobachter X kann sie mit seinem Gehör als Geräusch wahrnehmen, bevor das Geschoss an ihm vorbei ist – ganz wie wir das vom Alltag gewohnt sind, wenn wir etwa ein Tram kommen hören. Diese vorauseilende Welle ist übrigens ein

Problem, wenn man die Geschossgeschwindigkeit mit einer Lichtschrankenanlage messen will: Die Anlage misst häufig die Geschwindigkeit der Welle (also Schallgeschwindigkeit) anstelle der des Geschosses!

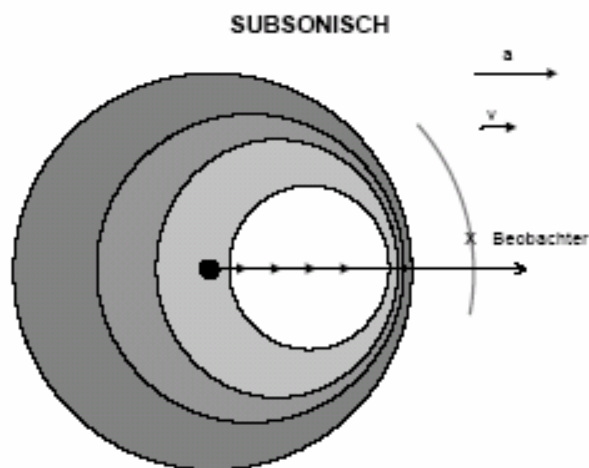


Bild 1

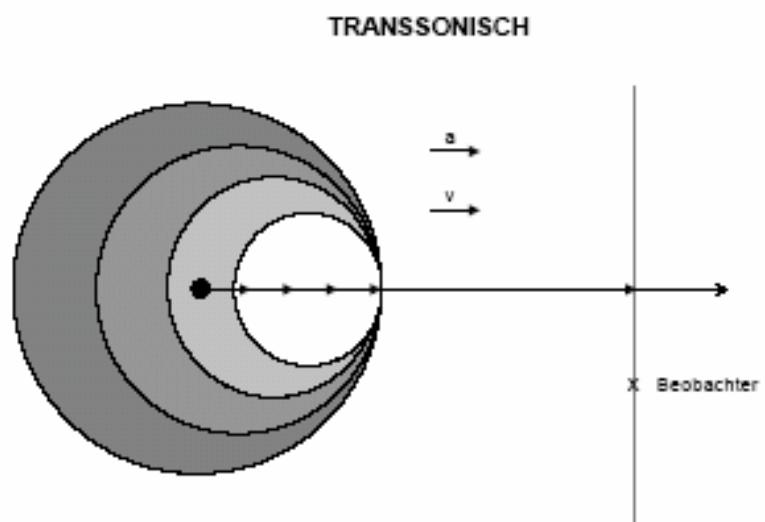


Bild 2



In Flugrichtung fällt auf, dass die kugelförmigen Wellenfronten zusammenrücken, weil ihnen die Kugel als Störquelle rasch folgt. Man erahnt schon, dass dort das Geschoss die Luft besonders verdichten muss und also die Luft dem Geschoss mit zunehmender Geschwindigkeit mehr Widerstand entgegensetzt. Bild 2 zeigt den extremen Fall, in welchem ein Geschoss genau mit Schallgeschwindigkeit fliegt, also  $v = a$  bzw.  $M = 1$  (transsonisch): Nach genügend langer Flugzeit überlagern sich die Wellenfronten zu einer ausgedehnten „Schallmauer“, die das Geschoss vor sich her schiebt und die einen besonders hohen Luftwiderstand mit sich bringt. Ein Beobachter hört das Geschoss erst genau in dem Moment, wenn es an ihm vorbeifliegt, und zwar als scharfen Knall.

Jenseits der Schallmauer ( $v > a$ ,  $M > 1$ , supersonisch) fliegt das Geschoss der Wellenfront voran und stösst in ruhende Luft – der Luftwiderstand sinkt wieder (Bild 3). Die Ueberlagerung der Wellenfronten ergibt eine kegelförmige Kopfwelle und bemerkenswerterweise kann ein Beobachter das Geschoss erst hören, wenn es schon an ihm vorbei ist – er hört den peitschenden Ueberschallknall.

Der Ueberschallknall ist besonders lästig für die Nachbarn von Schiessanlagen, für den Schützen selbst ist er bedeutungslos – er wird betäubt vom Mündungsknall und vom Ueberschallknall kann er schlimmstenfalls das Echo hören, wenn dieser reflektiert wird.

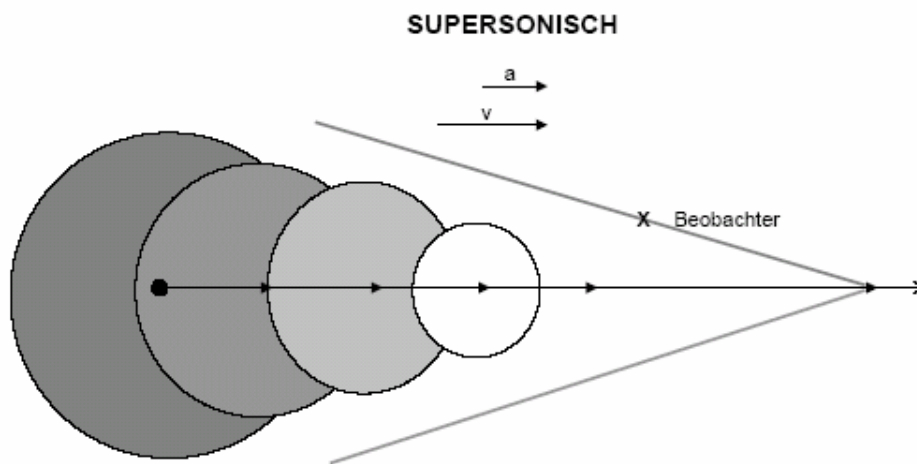


Bild 3

## 2. Der Verlauf des Luftwiderstandsbeiwertes

Intuitiv würde man vermuten, der Luftwiderstandsbeiwert  $c_w$  eines Geschosses sei nur von dessen Form, von dessen „Windschlüpfrigkeit“ abhängig – obige Ueberlegungen lassen jedoch zusätzlich eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit erwarten, mit einem Maximum in der Gegend um Mach = 1.

Genau dies entspricht auch der Realität, wie die  $c_w$ -Verläufe aus Bild 4 belegen. Diese Geschwindigkeitsabhängigkeit bedeutet eine erhebliche Komplizierung der Differentialgleichungen, mit denen man den Geschossflug berechnen will, zumal ein typischer  $c_w$ -Verlauf keiner einfachen mathematischen Funktion entspricht: Solche sind entweder monoton steigend oder fallend, aber sie haben keine Buckel!

Aber mit Hilfe von Computern kann man dieses mathematische Problem lösen und wenn nun die Geschosshersteller die  $c_w$ -Werte ihrer Geschosse publizieren täten, dann könnte man doch Flugbahnen genau berechnen – oder nicht? Leider nein, denn nebst von Geschossform und Geschwindigkeit ist der Luftwiderstandsbeiwert auch noch von der Dralllänge der Waffe abhängig, mit welcher das Geschoss verschossen wird!

In ihrem 50-Jahre Jubiläums-Handbuch publiziert die Firma Sierra Beobachtungen dieses überraschenden Phänomens, hier dargestellt in Bild 5. Nach amerikanischer Manier haben Sierra den BC als Mass für die Flugeigenschaften betrachtet und dabei festgestellt, dass bei grossen Dralllängen eine drastische Verschlechterung der Flugeigenschaften auftritt. Derselbe Effekt konnte in einem Experiment mit 185 grs Lapua Scenar Patronen beobachtet

werden, welche aus einem Lauf mit 12"-Drall verschossen bei weitem nicht die publizierten Werte (wahrscheinlich mit 10"-Drall ermittelt) erreichten (s. Bild 6).

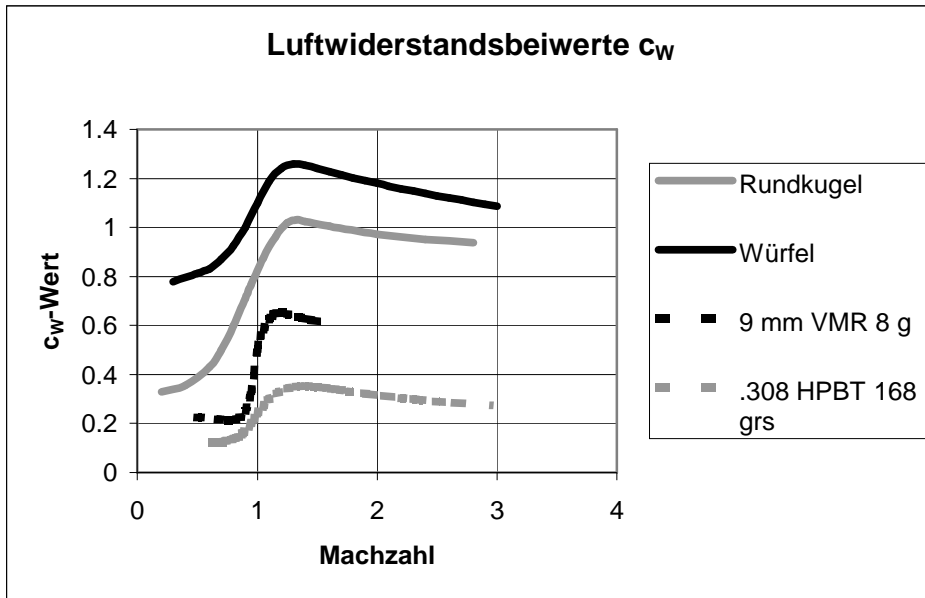


Bild 4

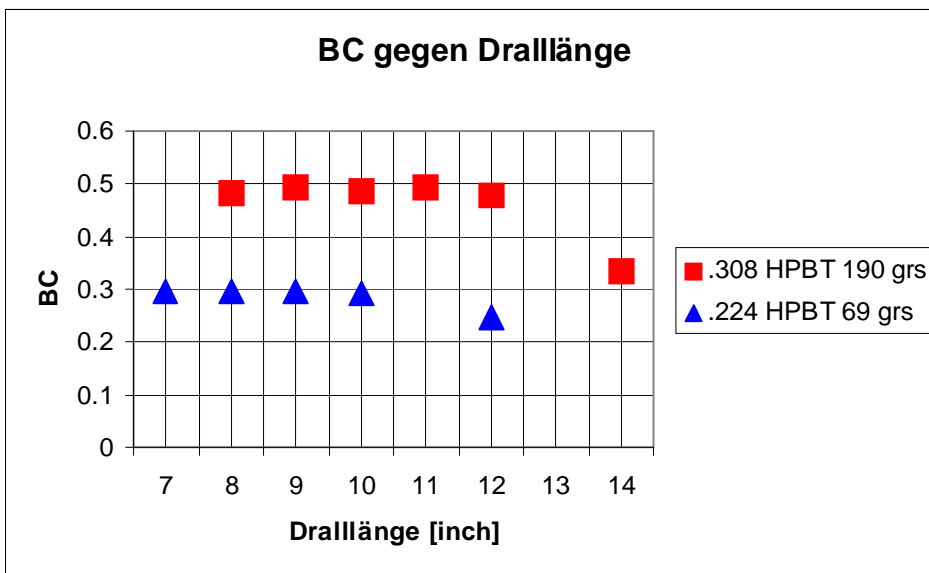


Bild 5

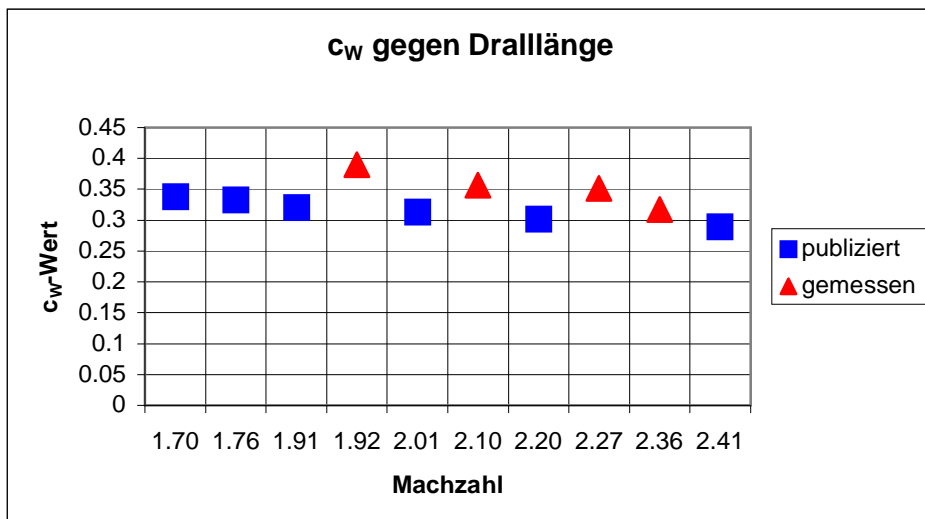


Bild 6



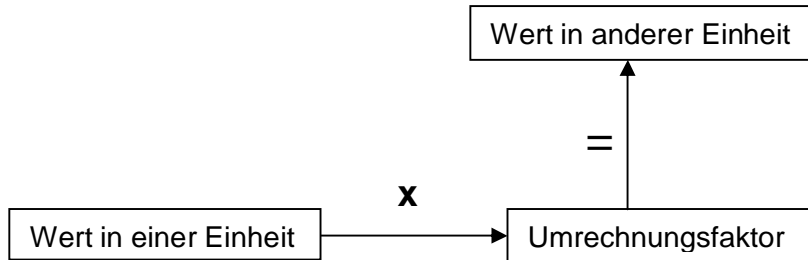
Offensichtlich tritt das Phänomen bei zu grossen Dralllängen auf, welche das Geschoss nur noch knapp zu stabilisieren vermögen. Der Grund liegt wohl darin, dass das grenzstabile Geschoss seine stabile Fluglage unter einem erheblichen Anstellwinkel zur Flugrichtung einnimmt und dem Luftwiderstand somit seine Flanke darbietet anstelle seiner Spitze; die Drallabhängigkeit des Luftwiderstandsbeiwertes macht sich also nur bei ungünstigen Paarungen Waffe/Patrone bemerkbar. Da das Wissen um die optimale Abstimmung von Dralllänge und Geschoss aber ein ziemliches Mysterium und keineswegs selbsterklärend ist, müssten Geschosshersteller ihre Daten zusätzlich noch mit einem Hinweis auf die Dralllänge ihres Testlaufes ergänzen, bzw. die Daten für verschiedene Dralllängen publizieren.

### **3. Zusammenfassung**

Die Berechnung von Flugbahnen ist keineswegs ein Hobby für Rechenkünstler, sondern von grosser militärischer Bedeutung. Man denke sich etwa einen Scharfschützen, der in Florida trainiert und dann am Hindukusch eingesetzt wird: Wenn er die nötigen Korrekturen seiner Visiereinstellung nicht berechnen kann, muss er die Waffe vor Ort von 100 m bis 1000 m neu einschossen, was einige Zeit braucht und in Feindesland ein gefährliches Unterfangen ist. Dabei ist die Berechnung an sich das kleinere Problem als die Ermittlung der Daten. Der ganze Aufwand zur Erforschung der Flugbahn rechnet sich nur für Armeen, welche zahlreiche gleiche Gewehre mit über Jahre hinweg gleichbleibender Munition einsetzen. Kleinere Einheiten, die sich mit dem simplen Messen der Mündungsgeschwindigkeit ihrer Patrone aus ihrer Waffe begnügen müssen, können die Flugbahnberechnung immerhin als Einschiesshilfe nutzen und so Zeit und Munition sparen; ausserdem sind solcherart berechnete Werte für „unscharfe“ Grössen wie Flugzeit und Querwindablage präzise genug. Berechnungen, die sich ausschliesslich auf Katalogdaten stützen, sind nützlich in der Beschaffungsphase: Sie helfen bei der Auswahl der Patrone, bei der Evaluation eines Zielfernrohrs mit Rücksicht auf dessen Verstellbereich und auch beim Ausrichten des Zielfernrohrs bei der Montage in der Werkstatt; für eine echte Berechnung der Flugbahn jedoch taugen Katalogdaten in der Regel nicht.

## Anhang: Umrechnungstabellen

Die unten stehenden Tabellen erleichtern das Umrechnen der verschiedenen Einheiten. Die Umrechnung erfolgt nach folgendem Schema:



Sinnlose Faktoren, wie z.B. mm in miles, sind nicht angegeben (-).

### Einheiten der Länge

	mm	cm	m	km	inch	foot	yard	mile
mm	1	0.1	0.001	-	0.03937	0.0033	0.0011	-
cm	10	1	0.01	-	0.3937	0.0328	0.0109	-
m	1000	0.001	1	0.001	39.3701	3.2808	1.0936	0.0006
km	-	-	1000	1	-	-	1093.6132	0.6215
inch	25.4	2.54	0.0254	-	1	0.0833	0.0278	-
foot	304.8	30.48	0.3048	0.0003048	12	1	0.3333	0.0002
yard	914.4	91.44	0.9144	0.0009	36	3	1	0.0006
mile	-	-	1609.344	1.609	-	5280	1760	1

### Einheiten der Geschwindigkeit

	m/s	km/h	fps	mph
m/s	1	3.6	3.2808	2.2371
km/h	0.2778	1	0.9113	0.6215
fps	0.3048	1.0973	1	0.6818
mph	0.447	1.609	1.4667	1

fps = feet per second (Fuss pro Sekunde)  
 mph = miles per hour (Meilen pro Stunde)

### Einheiten der Masse

	g	kg	gr	oz	lb
g	1	0.001	15.4321	0.0357	0.0022
kg	1000	1	-	35.2113	2.2046
gr	0.0648	-	1	0.0023	1/7000
oz	28.3495	0.0284	437.5	1	1/16
lb	453.5924	0.4536	7000	16	1

gr = grain  
 oz = ounce  
 lb = pound

Einheiten der Fläche

	mm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	inch <sup>2</sup>
mm <sup>2</sup>	1	0.01	0.000001	0.00155
cm <sup>2</sup>	100	1	0.0001	0.155
m <sup>2</sup>	1000000	10000	1	1550.003
inch <sup>2</sup>	645.16	6.4516	0.00065	1

Einheiten der Energie

	J	mkg	ft lb.wt
J	1	0.102	0.737561
mkg	9.81	1	7.25
ft lb.wt	1.35582	0.138	1

J = Joule  
 mkg = meterkilogramm  
 ft lb.wt = foot pound weight

Einheiten des Druckes

	N/m <sup>2</sup>	kPa	bar	psi
N/m <sup>2</sup>	1	0.001	0.00001	0.000145
kPa	1000	1	0.01	0.145
bar	100'000	100	1	14.5
psi	6894.76	6.89476	0.06895	1

psi = pound per square inch; auch lb.wt./in.2

Winkleinheiten

	MOA	grad	rad	MIL
MOA	1	60	0.00029	0.29*
grad	1/60	1	0.0174	17.3913*
rad	3439.2	57.3248	1	1000*
MIL	3.4483*	0.0575*	0.001*	1

Faktoren mit \* gelten nur für kleine Winkel bis ca. 1grad.

Beispiel: In einem amerikanischen Katalog findet sich die Angabe der Mündungsgeschwindigkeit zu 2500 ft/sec. Was macht dies in m/s?

Nach Tabelle „Einheiten der Geschwindigkeit“ rechnen wir  
 2500 ft/sec x 0.3048 = 762 m/s.

